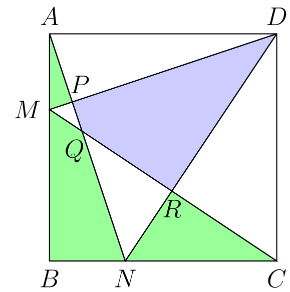
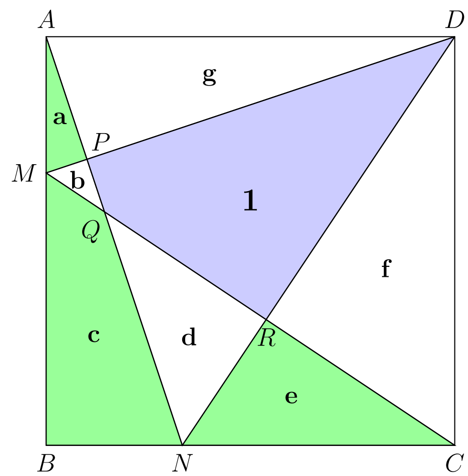
Seminario de problemas Curso 2022-23. Hoja 1

1. En un cuadrado $ABCD$, se elige un punto cualquiera M sobre el lado AB y otro punto cualquiera N sobre el lado BC. El punto M se une con los puntos C y D, mientras que el punto N se une con los puntos A y D. Sean P, Q y R las intersecciones de NA con MD, de NA con MC y de MC con ND, respectivamente. Si el área del cuadrilátero $DPQR$, coloreada en azul, es igual a 1, ¿cuál es el área de la región coloreada en verde, formada por los triángulos AMP, NRC y el cuadrilátero $MBNQ$?



Solución.

Nombremos con letras minúsculas a las áreas de las diferentes zonas en las que está dividido el cuadrado, como vemos en la siguiente figura, y llamemos S al área de todo el cuadrado. Lo que nos piden es obtener el valor de $a + c + e$.



Si consideramos el triángulo de vértices AND, su área es la mitad de la del cuadrado, ya que tiene como base un lado del cuadrado, AD, y como altura la distancia de N a la base, que es también un lado del cuadrado. Por otra parte el área del triángulo también es la suma de las áreas d, g y 1. Por tanto

$$d + g + 1 = \frac{1}{2}S.$$

Procediendo de manera análoga con el triángulo DMC, llegamos a la igualdad

$$b + f + 1 = \frac{1}{2}S.$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores, resulta

$$b + d + f + g + 2 = S.$$

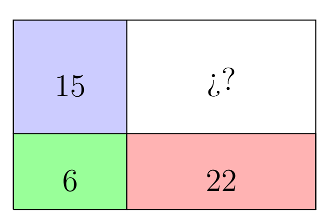
Ahora bien, el área del cuadrado es la suma de todas las áreas en que queda dividido, por lo que

$$a + b + c + d + e + f + g + 1 = S$$

y entonces

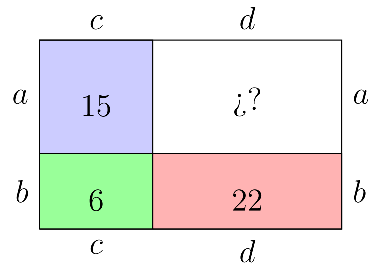
$$a + b + c + d + e + f + g + 1 = b + d + f + g + 2 \Rightarrow a + c + e = 1.$$

2. Un rectángulo se divide en cuatro partes mediante dos rectas paralelas a los lados. Si sabemos que el área de tres de esas partes es igual a 15, 6 y 22, como se ve en la figura, ¿cuál es el área de la cuarta parte?



Solución.

Las dos rectas trazadas dividen a los lados del rectángulo en dos partes cada uno. Sean a, b, c, d las longitudes de esas partes, como en la figura



Entonces, si S es el área que queremos calcular, se cumple

$$a \cdot c = 15, \quad b \cdot c = 6, \quad b \cdot d = 22, \quad a \cdot d = S.$$

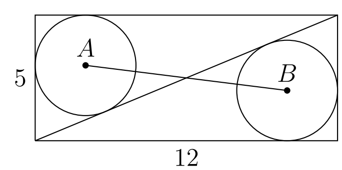
Si multiplicamos la primea ecuación por la tercera y hacemos lo mismo con la segunda y cuarta ecuaciones, resulta

$$a \cdot c \cdot b \cdot d = 15 \cdot 22, \qquad b \cdot c \cdot a \cdot d = 6 \cdot S.$$

Por tanto

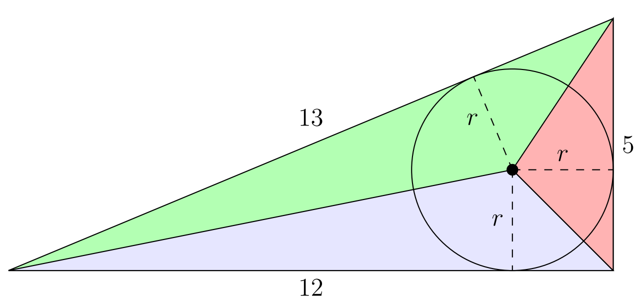
$$15 \cdot 22 = 6 \cdot S \Rightarrow S = 55.$$

3. La diagonal de un rectángulo de lados 5 y 12 divide al mismo en dos triángulos. Se inscribe una circunferencia en cada uno de los triángulos, cuyos centros respectivos son A y B. ¿Cuál es la distancia entre A y B?



Solución.

Lo primero que haremos será calcular el radio de la circunferencia inscrita. Para ello calcularemos el área del triángulo rectángulo en el que está inscrita de dos maneras diferentes. Por un lado, el área del triángulo es igual a la base por la altura dividido por dos que, en este caso, es igual a 30. Por otra parte, al ser el triángulo rectángulo, con catetos 5 y 12, podemos deducir, aplicando el Teorema de Pitágoras, que la hipotenusa del mismo es igual a 13. Dividamos ahora el triángulo en tres partes, como se ve en la siguiente figura.



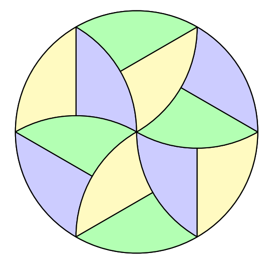
Teniendo en cuenta que en el punto de tangencia, la recta tangente y el radio son perpendicualres, se tiene que el radio de la circunferencia inscrita es la altura de cada uno de los tres triángulos en que hemos dividido el triángulo original, siendo sus bases los lados del triángulo. Por tanto, el área del triángulo es igual a

$$\frac{1}{2}(13+12+5)\cdot r = 15\cdot r.$$

Por lo tanto, $r = 2$. Si consideramos un sistema de referncia con origen en el vértice inferior izquierdo del rectángulo, las coordenadas del punto A son (2,3), mientras que las del punto B son (10,2). Entonces, la distancia entre A y B es igual a

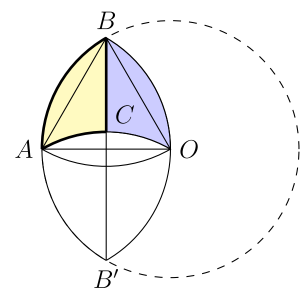
$$\sqrt{(10-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{65}.$$

4. Se divide un círculo de radio 1 en 12 partes iguales, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el perímetro de una sola de estas 12 partes?



Solución.

Fijémonos en dos de las partes y tomemos sus simétricas respecto al diámetro de la circunferencia, como se ve en la figura adjunta. Lo que tenemos que hacer es calcular el perímetro del triángulo curvo ABC.



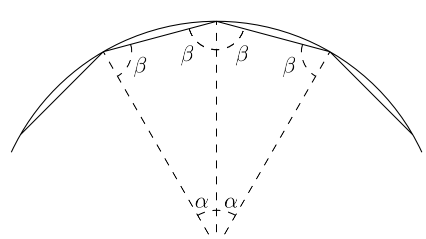
Por una parte, la longitud del arco AB es la sexta parte de la longitud de la circunferencia, mientras que la del arco AC es la mitad de la del arco AB. Como el radio de la circunferencia es 1, entonces $AB = \pi/3$ y $AC = \pi/6$. Por otra parte, el triángulo recto ABO es equilátero de lado 1, lo mismo que el triángulo $AB'O$. Puesto que la altura de estos triángulos es $\sqrt{3}/2$, la distancia de B a B' es $\sqrt{3}$. Como la distancia entre B' y C es igual al lado del triángulo, es decir 1, resulta que la longitud el lado BC es $\sqrt{3}-1$. Por lo tanto, el perímetro del triángulo curvo ABC es igual a

$$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}-1 = \frac{\pi}{2}+\sqrt{3}-1.$$

5. El ángulo interior de un polígono regular es el ángulo que forman dos lados consecutivos. ¿Cuántos polígonos regulares tienen un ángulo interior que es un número par?

Solución.

Sea N el número de lados del polígono regular. Entonces lo podemos dividir en N triángulos isósceles iguales, tal como se ve a continuación.



De aquí se deduce que el ángulo α es igual a $360°/N$ y, por lo tanto, el ángulo interior del polígono, que llamaremos I, es igual a 2β, por lo que

$$I = 2\beta = 180° - \frac{360°}{N}.$$

Como I es un número par, entonces se puede poner de la forma $I = 2k$, siendo k un número natural. Es decir,

$$2k = 180 - \frac{360}{N} \Rightarrow k = 90 - \frac{180}{N}.$$

De aquí deducimos que $180/N$ es un número natural y, por lo tanto, N un divisor de 180. Así pues, nuestro problema se reduce a saber calcular el número de divisores de 180. Podríamos hacerlo enumerando sus divisores, pero lo que haremos es contar el número de divisores de un número cualquiera, sabiendo cuál es su descomposición en factores primos.

Sea $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, la descomposición en factore primos de N, donde $p_1, \ldots, p_k$ son números primos y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ números enteros mayores o iguales que uno. Entonces, no es difícil ver que el número de divisores de N, que llamaremos D, es igual a

$$D = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_k).$$

Como $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, el total de divisores de 180 es igual a $(1+2)(1+2)(1+1) = 18$. Ahora bien, entre los divisores se encuentran el 1 y el 2, pero un polígono regular tiene siempre tres o más lados, luego estos dos divisores hay que descartarlos. Concluimos, entonces, que el número de polígínos regulares cuyo ángulo interior es un número par es 16.

6. ¿Cuál es el número más pequeño que tiene exactamente 28 divisores?

Solución.

Por el problema anterior, sabemos que el número de divisores del número N que buscamos se deduce de su descomposición en factores primos, por lo que

$$28 = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_k)$$

con $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ números enteros mayores o iguales que uno que son los exponentes de los números primos que entran en la descomposición del número buscado. Tenemos que

$$\begin{array}{ll} 28 = (1 + 27) & N = p_1^{27} \\ 28 = (1 + 13)(1 + 1) & N = p_1^{13} p_2 \\ 28 = (1 + 6)(1 + 3) & N = p_1^6 p_2^3 \\ 28 = (1 + 6)(1 + 1)(1 + 1) & N = p_1^6 p_2 p_3 \end{array}$$

Tomando p_1, p_2 y p_3 lo más pequeño posible, es fácil ver que el número más pequeño con 28 divisores es

$$N = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 = 960.$$

7. ¿Cuánto vale la suma de los inversos de los divisores de 360?

Solución.

Sean $d_1, d_2, \ldots, d_k$ los divisores de 360, entonces debemos calcular

$$s = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_k}.$$

Multiplicando y dividiendo por 360 tenemos que esta suma se puede escribir también como

$$s = \frac{1}{360}\left(\frac{360}{d_1} + \frac{360}{d_2} + \cdots + \frac{360}{d_k}\right).$$

Pero como los denominadores son divisores de 360, resulta que $360/d_j$, con $j = 1, \ldots, k$, es también un divisor de 360 y entonces

$$s = \frac{1}{360}(d_1 + d_2 + \cdots + d_k).$$

Así, hemos reducido el problema a saber calcular la suma de los divisores de un número, en este caso 360. Este problema es muy parecido al de calcular el total de divisores de un número. De este modo, si la descomposición de un número N en factores primos es

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

la suma S_N de sus divisores es igual a

$$S_N = (1 + p_1 + p_1^2 + \cdots p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots p_2^{\alpha_2}) \cdots (1 + p_k + p_k^2 + \cdots p_k^{\alpha_k}).$$

Como $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, entonces

$$S_{360} = (1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3 + 3^2)(1 + 5) = 15 \cdot 13 \cdot 6.$$

Finalmente, $s = S_{360}/360 = (15 \cdot 13 \cdot 6)/360 = 13/4$.