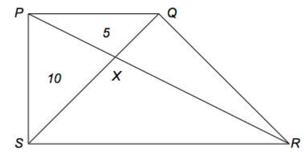
Seminario de problemas Curso 2016-17. Hoja 1

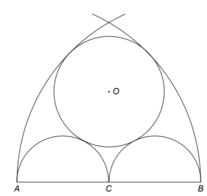
1. En el trapecio rectángulo $PQRS$ trazamos las diagonales, siendo 5 y 10 las áreas de dos de los triángulos que determinan, como se muestra en la figura.
¿Cuál es el área del trapecio?



Solución.

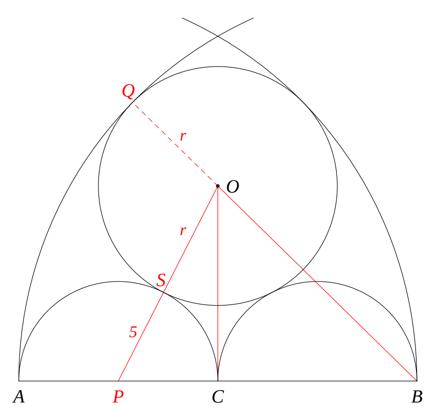
Llamemos X al punto en el que se cortan las dos diagonales. Como el triángulo ΔPSQ y el triángulo ΔPRQ tienen la misma base y la misma altura, sus áreas serán iguales y, por tanto, el área del triángulo ΔPXS es igual al área del triángulo ΔQXR e igual a 10. Para calcular el área del trapecio solo nos falta obtener el área del triángulo ΔSXR. Ahora bien, este triángulo es semejante al triángulo ΔPXS. Si obtenemos la razón de semejanza obtendremos inmediatamente el área. Ahora bien, los triángulos ΔPXQ y ΔPSQ tienen la misma base y el segundo el triple de área, por lo que la altura de ΔPSQ es el triple de la altura de ΔPXQ. Puesto que la altura de ΔPSQ es PS, igual a la suma de las alturas de ΔPXQ y ΔSXR, se deduce que la altura de ΔSXR es el doble de la de ΔPXQ y por tanto el área de ΔSXR es cuatro veces la de ΔPXQ, es decir ΔSXR tiene área 20 y el área del trapecio es igual a 45.

2. Determinar el radio de la circunferencia de centro O que es tangente a las dos semicircunferencias de diámetros $AC = CB = 10$ cm y a los arcos de centros A y B y radio AB.



Solución.

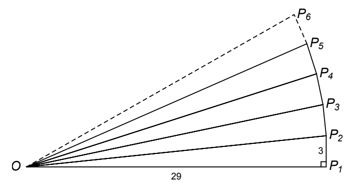
Sea P el centro de la semicircunferencia de diámetro AC; S el punto de tangencia con la circunferencia de la cual queremos determinar su radio r y Q el punto de tangencia entre la circunferencia de centro B y radio $AB = 40$, como se ve en el dibujo.



Consideremos los triángulos rectángulos ΔPOC y ΔBOC, que comparten el lado OC. Por la propiedad de tangencia, los puntos P, S y O están alineados, lo mismo que los puntos B, O y Q. Por tanto, $PO = r + 5$ y $BO = 20 - r$. Puesto que $PC = 5$ y $BC = 10$ resulta

$$(r + 5)^2 - 5^2 = (20 - r)^2 - 10^2 \Rightarrow 10r = 300 - 40r \Rightarrow r = 6.$$

3. La sucesión de puntos $P_1, P_2, \ldots$, describe una espiral en torno al punto O, de manera que, para $j \geq 1$, cada uno de los triángulos P_jOP_{j+1} es rectángulo y $P_jP_{j+1} = 3$. Si $OP_1 = 29$, ¿cuál es el siguiente valor de n para el que OP_n es un número entero?



Solución.

Puesto que cada uno de los triángulos ΔP_jOP_{j+1} es rectángulo, siendo la hipotenusa OP_{j+1}, se tiene que:

$$OP_2 = OP_1^2 + 3^2, \quad OP_3^2 = OP_2^2 + 3^2 = OP_1^2 + 2 \cdot 3^2, \quad \ldots, \quad OP_n^2 = OP_1^2 + (n-1) \cdot 3^2.$$

Como $OP_1 = 29$, buscamos un valor de n tal que

$$29^2 + 9(n-1) = k^2,$$

con k un entero positivo. Manipulando la expresión anterior se tiene

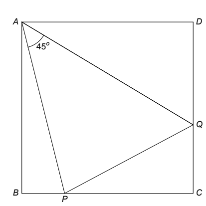
$$9(n-1) = k^2 - 29^2 = (k - 29)(k + 29).$$

De aquí se deduce que $k > 29$ y que 9 divide al producto $(k - 29)(k + 29)$. Aquí hay dos posibilidades. Por un lado podría ser que cada uno de los dos factores, $(k - 29)$ y $(k + 29)$ fueran múltiplos de 3. Pero eso no puede ser, ya que si ambos lo fueran, tamboén lo sería su diferencia. Como $(k+29) - (k-29) = 58$ no es múltiplo de 3, ambos factores no pueden ser a la vez múltiplos de tres. Por tanto uno de ellos es múltiplo de 9. Siendo $k > 29$, el primer valor de k para el que alguno de los factores es múltiplo de 9 es $k = 34$, pues en ese caso $k + 29 = 63$. Así pues, se tiene

$$9(n-1) = 5 \cdot 63 \Rightarrow n = 36$$

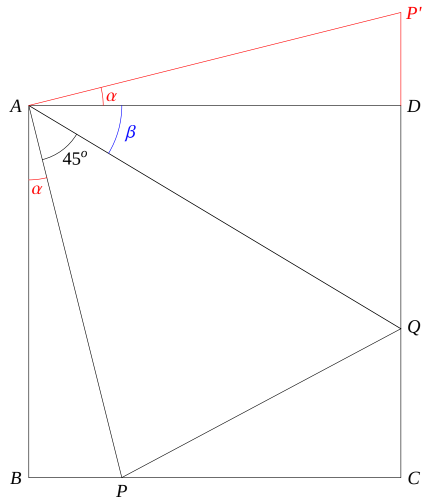
y $OP_n = 34$.

4. Dado un cuadrado $ABCD$ de lado L, se escoge P, en BC, y Q, en CD, de manera que el ángulo $\angle PAQ = 45°$. Calcular el perímetro del triángulo ΔPQC.



Solución.

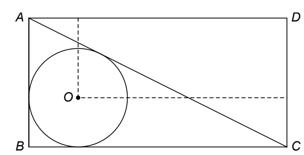
Tomemos el triángulo ΔABP y llevémoslo sobre el lado AD del cuadrado, como en la siguiente figura.



Los ángulos α y β suman 45°, por lo que los triángulos ΔAPQ y $\Delta AQP'$ son iguales ya que tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido entre ellos. Por tanto, el lado PQ es igual a $QP' = QD + DP' = QD + BP$. De aquí se deduce que el perímetro de ΔPQC es

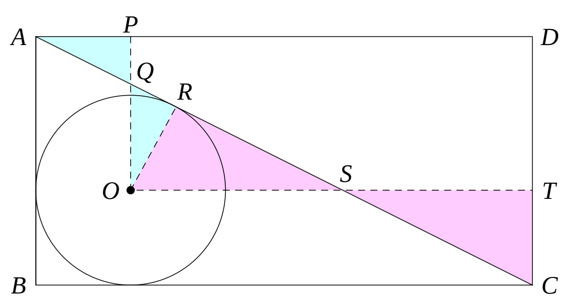
$$PQ + CQ + PC = BP + PC + CQ + QD = BC + CD = 2L.$$

5. En el rectángulo $ABCD$ de área 2016 se ha dibujado una circunferencia de centro O inscrita en el triángulo ΔACD. ¿Cuál es el área del rectángulo de lados paralelos al inicial en el que O y D son vértices opuestos?



Solución.

La solución casi se puede ver sin palabras, a través del siguiente dibujo



Los triángulos ΔAPQ y ΔORQ son iguales, por tener los ángulos iguales y ser $AP = OR$. Análogamente, los triángulos ORS y CTS son iguales. Por lo tanto, el área del rectángulo $POTD$ es igual al área del triángulo ΔADC que es la mitad del rectángulo original, que es 1008.

6. Determinar todas las ternas de enteros positivos (a,b,c) tales que

$$\frac{3ab-1}{abc+1}$$

es también un entero positivo.

Solución.

Supongamos que

$$\frac{3ab-1}{abc+1}=n,$$

con n un entero positivo. De aquí se deduce que

$$3ab-1=nabc+n$$

o, lo que es lo mismo,

$$3ab-nabc=n+1\Rightarrow ab=\frac{n+1}{3-nc}.$$

Como a,b,c,n son todos enteros positivos, tiene que ser que $3-nc>0$ y por lo tanto la pareja de enteros positivos (n,c) solo puede ser una de las siguientes

$$(n,c)=(1,1),(1,2),(2,1).$$

- Si $(n,c)=(1,1)$, entonces $ab=1$ y $(a,b,c)=(1,1,1)$.
- Si $(n,c)=(1,2)$, entonces $ab=2$ y $(a,b,c)=(1,2,2),(2,1,2)$.
- Si $(n,c)=(2,1)$, entonces $ab=3$ y $(a,b,c)=(1,3,2),(3,1,2)$.

Así pues, solo hay cinco ternas que satisfagan los requerimientos del problema y son las cinco enumeradas en los ítems anteriores.

7. Determinar todos los números primos, p, para los cuales $16p+1$ es un cubo perfecto.

Solución.

Si $16p+1$ es un cubo perfecto, entonces existe un entero positivo k tal que

$$16p+1=k^3.$$

Esto significa que k^3 deja resto 1 cuando se divide por 16. En notación matemática escribimos $k^3\equiv 1(\mod 16)$, que se lee: k^3 *es congruente con 1 módulo 16* y que lo que quiere decir es que k^3-1 es divisible por 16 o que k^3 y 1 dejan el mismo resto cuando se dividen por 16. De aquí es fácil deducir que entonces $k\equiv 1(\mod 16)$. Es decir, existe un entero positivo n tal que $k=16n+1$. Por tanto

$$16p+1=(16n+1)^3=16^3n^3+3\cdot 16^2n^2+3\cdot 16n+1$$

y, entonces

$$16p=16n(16^2n^2+3\cdot 16n+3)\Rightarrow p=n(16^2n^2+3\cdot 16n+3).$$

Como p es primo, y el segundo factor en el segundo miembro es siempre mayor que uno, debe ser $n = 1$ y, entonces, $p = 307$, que puede comprobarse que es primo.

Hay otra forma alternativa de resolver el problema, que es muy similar. Partiendo de la identidad

$$16p + 1 = k^3$$

podemos escribir

$$16p = k^3 - 1 = (k - 1)(k^2 + k + 1).$$

Ahora bien, el segundo factor es siempre un número impar mayor estricto que 1, por lo que necesariamente 16 es un divisor de $k - 1$. Pero como p es primo y el segundo factor es mayor que uno, tiene que ser $k - 1 = 16$ o, lo que es lo mismo, $k = 17$. Por tanto,

$$p = 17^2 + 17 + 1 = 307,$$

que es la solución obtenida antes.