Seminario de problemas Curso 2020-21. Hoja 1

1. Calcula la última cifra del número $2019^{2018^{2017^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}$.

Solución.

Puesto que solo nos interesa la última cifra, el problema es equivalente a obtener la última cifra de

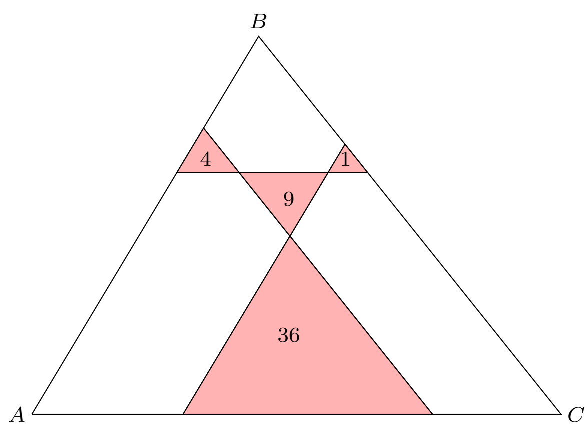
$$9^{2018^{2017^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}.$$

Ahora bien, las potencias de 9 acaban en 1 o en 9, dependiendo si el exponente es par o impar. Pero el exponente es igual a

$$2018^{2017^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}},$$

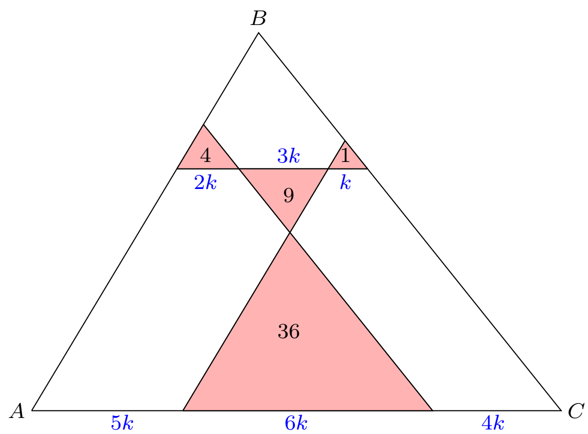
que, al ser una potencia de 2018, obviamente es par y el número acaba en 1.

2. En un triángulo ABC se trazan paralelas a los lados, formándose cuatro triángulos en el interior, como se ve en la figura de abajo. Si las áreas de estos triángulos son las que se indican, 1 cm², 4 cm², 9 cm² y 36 cm², ¿cuál es el área del tringulo ABC? .



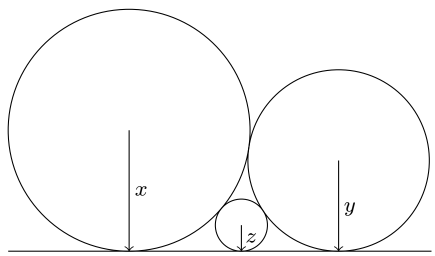
Solución.

Es evidente que todos los triángulos sombreados son semejantes entre sí y semejantes al triángulo ABC. Llamemos k a la base del triángulo de área 1. Entonces, se tiene lo siguiente



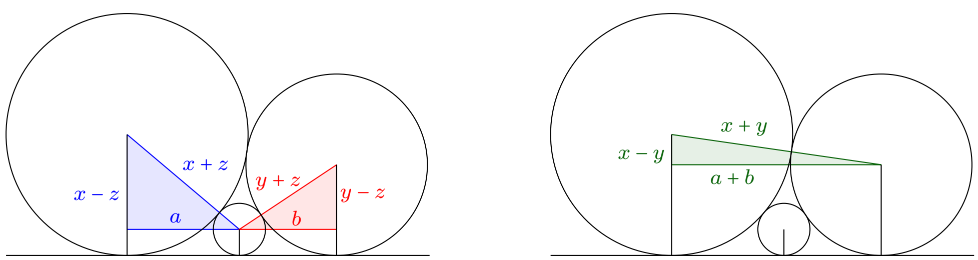
De aquí se sigue que la relación entre los lados del triángulo grande respecto al de área 1 es 15, por lo que su área es 15^2 veces mayor, es decir 225.

3. Dados tres círculos tangentes entre sí y tangentes a una recta común (ver figura), con radios $x \geq y > z$, prueba que $\frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$.



Solución.

Consideremos los siguientes triángulos



Por el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= (x+z)^2 - (x-z)^2 = 4xz \Rightarrow a = 2\sqrt{xz}, \\
b^2 &= (y+z)^2 - (y-z)^2 = 4yz \Rightarrow b = 2\sqrt{yz}, \\
(a+b)^2 &= (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy \Rightarrow a+b = 2\sqrt{xy}
\end{aligned}
$$

De aquí se sigue que:
$$\sqrt{xy} = \sqrt{xz} + \sqrt{yz}$$
y, dividiendo por $\sqrt{xyz}$, se llega a la igualdad pedida.

4. Sea p un número primo mayor estricto que 3. Prueba que $p^2 - 1$ es divisible por 24.

Solución.

Por tratarse de un número primo mayor que 3, el número p es impar y no es múltiplo de 3. Por tanto, se cumple lo siguiente:

- $p-1$ y $p+1$ son pares y uno de ellos múltiplo de 4.
- Uno de los números $p-1$, $p+1$ es múltiplo de 3.

Puesto que $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$, teniendo en cuenta las observaciones anteriores, el producto es múltiplo de 8 y de 3, por lo que $p^2 - 1$ es múltiplo de 24.

5. Podemos comprobar que $3 \times 4 \times 5 \times 6 = 360 = 19^2 - 1$. Prueba que el producto de cuatro enteros consecutivos es igual a un cuadrado perfecto menos uno.

Solución.

Sean $n-1$, n, $n+1$ y $n+2$ los 4 números consecutivos. Entonces, tenemos que probar que:
$$(n-1)n(n+1)(n+2) + 1$$
es un cuadrado perfecto. Ahora bien, desarrollando la expresión anterior, resulta
$$n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 1.$$
No es difícil ver que $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 1 = (n^2 + n - 1)^2$. Es decir
$$(n-1)n(n+1)(n+2) = (n^2 + n - 1)^2 - 1.$$

6. De dos puntos A y B, separados por una distancia de 100 km, parten simultáneamente al encuentro dos ciclistas con velocidades de 20 km/h y 30 km/h, respectivamente. Junto con ellos, también parten al encuentro dos moscas con velocidad de 50 km/h. Las moscas vuelan hasta que se encuentran, después vuelan de regreso hasta encontrarse con los ciclistas, vuelven y vuelan hasta encontrarse de nuevo, y así sucesivamente. ¿Cuántos kilómetros en dirección de A a B recorre cada mosca antes de que los ciclistas se encuentren?

Solución.

La distancia recorrida entre los dos ciclistas hasta encontrarse es, obviamente, la distancia que los separa, es decir 100 km. Esa distancia es como si la recorrieran a 50 km/h (la suma de sus velocidades), por lo que habrán invertido 2 horas hasta el momento de encontrase. Por tanto, cada una de las moscas ha estado volando 2 horas y en ese tiempo habrán recorrido 100 km cada una de ellas.

Por otra parte, el punto de encuentro de los ciclistas está a 40 km del punto A y a 60 km del punto B, que es donde acaban finalmente las moscas.

La mosca que parte de A, que ha recorrido 100 km, necesariamente ha hecho 40 km en dirección B y los otros 60 km habrán sido la mitad en un sentido y la mitad en el otro (de otro modo no habría acabado a 40 km de A). Así pues, ha recorrido 70 km en dirección de A a B.

Razonando análogamente, es fácil comprobar que la otra mosca ha recorrido 20 km en dirección de A a B.