Seminario de problemas Curso 2019-20. Hoja 2

13. Demostrar que la suma $A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ es divisible por 133 cualquiera que sea el número entero $n \geq 0$.

Solución:

B.I Veamos que no es cierto para $n = 1$:

$$11^3 + 12^3 = 3059 = 23 \cdot 133$$

H.I. Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir, para un número entero m, suponemos que

$$11^{k+2} + 12^{2k+1} = 133 \cdot m.$$

¿Será cierto para $n = k + 1$?, es decir, ¿se cumplirá para algún número s que:

$$11^{k+3} + 12^{2k+3} = 133 \cdot s?$$

Usamos la H.I. y usamos que, si un número a es múltiplo de b, entonces $a-b$ sigue siendo múltiplo de b para obtener el resultado:

$$\begin{aligned}
11^{k+3} + 12^{2k+3} &\to 11^{k+3} + 12^{2k+3} + 11 - 12^2 = 11(11^{k+2} + 1) + 12^2(12^{2k+1} - 1) = \\
&= 11(11^{k+2} + 1) + 11(12^{2k+1} - 1) + 133(12^{2k+1} - 1) = \\
&= 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133(12^{2k+1} - 1) = \\
&= 11 \cdot 133 \cdot m + 133(12^{2k+1} - 1) = 133 \cdot s.
\end{aligned}$$

14. ¿Pueden las 2^n secuencias binarias de longitud n ser organizadas de forma que dos secuencias binarias consecutivas difieran exactamente en un símbolo?

Solución:

Para el caso base es trivial: $\{0, 1\}$. En el caso de secuencias binarias de longitud 2 escribimos la primera secuencia en un sentido y el contrario primero con el dígito 0 y después con el dígito 1: $\{00, 01, 11, 10\}$. Se sigue una construcción recurrente:

$$\{000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100\}$$

$$\{0000, 0001, 0011, 0010, 0110, 0111, 0101, 0100, 1100, 1101, 1111, 1110, 1010, 1011, 1001, 1000\}$$

15. Encontrar todos los números naturales tales que $10^n + 11^n + 12^n = 13^n + 14^n$.

Solución:

Se comprueba que $n = 0$ y $n = 1$ no son soluciones mientras que $n = 2$ si que lo es. Demostramos por inducción que $P(n) : 10^n + 11^n + 12^n < 13^n + 14^n$ se cumple para $n > 2$.

B.I Veamos que no es cierto para $n = 3$:

$$10^3 + 11^3 + 12^3 = 4059 < 4941 = 13^3 + 14^3.$$

H.I. Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir,

$$10^k + 11^k + 12^k < 13^k + 14^k$$

¿Será cierto para $n = k + 1$?, es decir,

$$10^{k+1} + 11^{k+1} + 12^{k+1} < 13^{k+1} + 14^{k+1}$$

Usamos la H.I. para obtener el resultado:

$$10^{k+1} + 11^{k+1} + 12^{k+1} = (10^k + 11^k + 12^k) \cdot 10 + 11^k + 2 \cdot 12^k <$$

$$< (13^k + 14^k) \cdot 10 + 11^k + 2 \cdot 12^k < (13^k + 14^k) \cdot 10 + 3 \cdot 13^k + 4 \cdot 14^k = 13^{k+1} + 14^{k+1}.$$

16. Demostrar la siguiente desigualdad para cualquier $n > 1$, $n! \leq (\frac{n+1}{2})^n$.

Solución:

Usando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ tenemos para todo $1 \leq k \leq n$ un valor de k:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{k + (n-k+1)}{2} \geq \sqrt{k(n-k+1)}$$

De esta forma se cumple que:

$$(\frac{n+1}{2})^n = \prod_{k=1}^{n} \frac{n+1}{2} \geq \prod_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k+1)} = n!.$$

17. Demostrad la siguiente desigualdad para $n \geq 3$, $n^{(n+1)} > (n+1)^n$

Solución:

La desigualdad es equivalente a la siguiente desigualdad dividiendo entre n^n y probamos por inducción.

$$n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

B.I Veamos que es cierto para $n = 3$:

$$3 > \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27} = 2 + \frac{10}{27}$$

H.I. Supongamos que es cierto para n, y usando la hipótesis inductiva:

$$n + 1 = n\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

18. Demostrad por inducción que se cumple la siguiente desigualdad para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

Solución:

B.I Veamos que no es cierto para $n = 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} < 2\sqrt{1}$$

H.I. Supongamos que es cierto para $n = k$, es decir, suponemos que

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}$$

¿Será cierto para $n = k+1$?, es decir,

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}.$$

Usamos la H.I. para obtener el resultado.

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Esto es equivalente a comprobar

$$\begin{aligned} 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} &\Leftrightarrow 2\sqrt{k^2+k} + 1 < 2k+2 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{k^2+k} < 2k+1 \\ &\Leftrightarrow 4k^2+4k < 4k^2+4k+1 \end{aligned}$$

19. Comprueba la siguiente desigualdad $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(i+1)^i} < (n+1)!(\forall n \in Z^+)$

Solución:

Comprobamos el siguiente resultado previamente:

$$\sqrt{(n+1)^n} < (n+1)! - n!$$

para cualquier entero $n \geq 3$. Esto es equivalente a comprobar que:

$$\iff (n+1)^n < ((n+1)! - n!)^2 \iff (n+1)^n < (n \cdot n!)^2$$

Usando que, dados a y b dos enteros positivos mayores o iguales que 2 entonces $a+b \leq ab$, tenemos que:

$$(2+(n-1))(3+(n-2))(4+(n-3))\cdots((n-1)+2) < (2\cdot(n-1))(3\cdot(n-2))(4\cdot(n-3))\cdots((n-1)\cdot 2)$$

$$(n+1)^{n-2} < (n-1)!^2$$

y usando que:

$$n+1 < n^2 \implies (n+1)^2 < n^4$$

Concluimos entonces el resultado previo necesario:

$$((n+1)^{n-2})(n+1)^2 < (n-1)!^2(n^4) \implies (n+1)^n < (n \cdot n!)^2$$

Ahora demostraremos el problema aplicando inducción.

B.I Veamos que no es cierto para $n = 1, 2, 3$*:*

$$\sqrt{2} < 2, \sqrt{2} + 3 < 6, \sqrt{2} + 11 < 24$$

H.I. Supongamos que es cierto para $n = k - 1$*, es decir, suponemos que*

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{(i+1)^i} < k!$$

¿Será cierto para $n = k$*?, es decir,*

$$\sum_{i=1}^{k} \sqrt{(i+1)^i} < (k+1)!.$$

Usando el resultado previo $\sqrt{(n+1)^n} < (n+1)! - n!$ *para obtener el resultado.*

$$\sum_{i=1}^{k} \sqrt{(i+1)^i} < \sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{(i+1)^i} + \sqrt{(k+1)^k} < k! + ((k+1)! - k!) < (k+1)!$$

20. Si n es una potencia de 2. Prueba que entre $2n - 1$ números hay n de ellos tales que su suma es divisible entre n.

Solución:

B.I El resultado es cierto para $n = 1$ *ya que entre* 3 *números siempre hay* 2 *de ellos tales que su suma es divisible entre* 2

H.I. Supongamos que es cierto para $2, n$ *y demostramos que es cierto para* $2n$*. Entre* $4n - 1$ *números, podemos encontrar n tales que su suma es divisible entre n. Llamamos a la suma de estos na. Entre el resto de ellos, es deciir,* $3n - 1$ *números, podemos encontrar n tales que su suma es divisible entre n. Llamamos a la suma de estos nb. Otra vez entre los restantes, es decir,* $2n - 1$ *números, podemos encontrar n tales que su suma es divisible entre n. Llamamos a la suma de estos nc. Por último, entre* a, b, c*, podemos encontrar dos de ellos tales que su suma es divisible entre 2. Por ejemplo,* $a + b$*. Por lo tanto,* $2n | n(a + b)$*.*