

- 119.** Se define el doble factorial de un número impar  $n$  como  $n!! = n(n-2)(n-4)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$ . Calcula la última cifra de  $1!! + 3!! + 5!! + 7!! + \cdots + 2023!!$

**Solución.** Tengamos en cuenta que los 1010 números  $5!!$ ,  $7!!$ ,  $\dots$ ,  $2023!!$  son múltiplos impares de 5, luego su última cifra es 5. Al sumar 1010 veces números que acaban en 5 obtenemos un número que acaba en 0. Finalmente, al sumarle  $1!!$  y  $3!!$  obtenemos un número que acaba en 4.

- 120.** Encuentra los números enteros  $n \in \mathbb{Z}$  que cumplen que  $n^2 + 2n + 2$  divide a  $n^3 + 4n^2 + 4n - 14$ .

**Solución.** Como  $n^3 + 4n^2 + 4n - 14 = (n^2 + 2n + 2)(n + 2) - (2n + 18)$ , tenemos dos posibilidades:

1.  $2n + 18 = 0$ , es decir,  $n = -9$ .
2.  $(n^2 + 2n + 2)$  divide a  $2n + 18$ . Esto solo es posible si  $|2n + 18| \geq |n^2 + 2n + 2| = n^2 + 2n + 2$ . Si  $n \leq -9$ , esta desigualdad se transforma en

$$n^2 + 2n + 2 \leq -2n - 18 \iff n^2 + 4n + 20 \leq 0.$$

Esta igualdad no se cumple para ningún valor de  $n \in \mathbb{Z}$ .

Si  $n \geq -9$ , la desigualdad anterior se transforma en  $n^2 \leq 16$ , es decir,  $|n| \leq 4$ . Analizando para cuáles de estos valores se cumple que  $(n^2 + 2n + 2)$  divide a  $2n + 18$ , se tiene que  $n$  puede tomar los valores  $-4, -2, -1, 0, 1, 4$ .

En definitiva, hay 7 posibles valores para  $n$ :  $-9, -4, -2, -1, 0, 1, 4$ .

- 121.** En el interior de un cuadrado  $ABCD$  de lado  $x$  se sitúa un punto  $P$  de forma que la distancia entre  $P$  y el vértice inferior derecho del cuadrado,  $B$ , es 13 cm., la distancia entre  $P$  y el vértice superior derecho del cuadrado,  $C$ , es 20 cm. y la distancia entre  $P$  y el vértice superior izquierdo del cuadrado,  $D$ , es 17 cm. Calcula el área del cuadrado.

**Solución.** Sean  $\alpha$  el ángulo  $PCB$  y  $\beta$  el ángulo  $PCD$ . Por el teorema del coseno

$$13^2 = 20^2 + x^2 - 40x \cos \alpha,$$

$$17^2 = 20^2 + x^2 - 40x \cos \beta.$$

Como además,  $\alpha + \beta = \pi/2$ ,  $\cos \beta = \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$ . De aquí:

$$40x \cos \alpha = x^2 + 231, \quad 40x \sin \alpha = x^2 + 111,$$

$$(40x)^2 = (x^2 + 231)^2 + (x^2 + 111)^2.$$

Llamamos  $y = x^2$  al valor del área que queremos calcular. Operando,

$$1600y = 2y^2 + 684y + 231^2 + 111^2 \Rightarrow 1600y = 2y^2 + 684y + 65682,$$

$$y^2 - 458y + 32841 = 0 \Rightarrow (y - 89)(y - 369) = 0.$$

Descartamos la solución  $y = 89$ , para la cual  $x = \sqrt{89} \approx 9.434$  y entonces el punto  $P$  cae fuera del cuadrado. Por lo tanto,  $y = 369$  cm<sup>2</sup> y  $x = \sqrt{369} \approx 19.2094$  cm.

- 122.** Sea  $P(x)$  un polinomio con coeficientes enteros. Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  tres enteros diferentes. Prueba que no puede ocurrir simultáneamente  $P(a) = b$ ,  $P(b) = c$  y  $P(c) = a$ .

**Solución.** Supongamos, sin pérdida de generalidad que  $a < b < c$ . El polinomio  $P(x)$  puede escribirse de la siguiente forma:

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Entonces,  $P(c) - P(a) = a_n(c^n - a^n) + \cdots + a_1(c - a)$ . Sacando factor común  $(c - a)$ , se tiene,

$$a - b = P(c) - P(a) = (c - a)Q(a, c),$$

donde  $Q(a, c)$  es un número entero resultante de hacer las operaciones al sacar factor común  $(c - a)$ .

En consecuencia,  $c - a$  divide a  $a - b$ , pero esto es imposible ya que  $|c - a| > |b - a|$ .

- 123.** Ana y Bea juegan al siguiente juego tirando dos dados unas cuantas veces. Ana apuesta porque salga un 12. Bea apuesta porque salgan dos sietes de forma consecutiva. El juego termina cuando se produzca la primera situación ganadora (o un 12 o dos sietes consecutivos). ¿Cuál es la probabilidad de que gane Ana?

**Solución.** Sea  $p$  la probabilidad de que gane Ana. Se pueden dar las siguientes situaciones:

- Si en la primera tirada sale un 12, Ana es la ganadora. Esto ocurre con una probabilidad de  $1/36$ .
- Si en la primera tirada sale un 7 y en la segunda un 12, Ana vuelve a ser la ganadora. Esto ocurre con una probabilidad de  $1/6 \times 1/36 = 1/216$ .
- Si en las dos primeras tiradas sale un 7 Bea es la ganadora. Esto ocurre con una probabilidad de  $1/6 \times 1/6 = 1/36$ .
- Si en la primera tirada sale un 7 y en la segunda no sale ni un 7 ni un 12 (algo que ocurre con una probabilidad de  $1/6 \times 29/36 = 29/216$ ), Ana gana con probabilidad  $p$ .
- Si en la primera tirada no sale ni un 7 ni un 12 (algo que ocurre con una probabilidad de  $29/36$ ), Ana gana con probabilidad  $p$ .

Por lo tanto  $p = 1/36 + 1/216 + (29/216)p + (29/36)p$ . Despejando,  $p = 7/13$ .

- 124.** Se define la sucesión de números reales positivos por la recurrencia  $a_0 = 1$ ,  $a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1}$  para  $n \geq 0$ . Encuentra  $a_{2023}$ .

**Solución.** La recurrencia  $a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 0$  es lineal y homogénea, con ecuación característica  $r^2 + r - 2 = 0$ . Las raíces de esta ecuación son  $r = 1$  y  $r = -2$ . La solución general es  $a_n = A1^n + B(-2)^n = A + B(-2)^n$ , donde  $A$  y  $B$  son constantes a determinar.

Como los términos de la sucesión son positivos, se tiene que  $B = 0$ . Además, como  $a_0 = 1$ ,  $A = 1$ . En consecuencia, la sucesión es constantemente igual a 1 y  $a_{2023} = 1$ .

- 125.** Se dobla una hoja de papel rectangular de modo que dos esquinas opuestas en diagonal se unan. Si el pliegue formado tiene la misma longitud que el lado más largo de la hoja, ¿cuál es la razón entre el lado más largo de la hoja y el lado más corto?

**Solución.** Sean  $a \leq b$  las longitudes de los lados del rectángulo. Sea  $d$  la medida de la diagonal y  $x$  la medida de la línea de doblado. Por el teorema de Pitágoras  $d^2 = a^2 + b^2$ .

Por otro lado, teniendo en cuenta la simetría de la figura, la diagonal y la línea de pliegue forman un ángulo recto. Además, ambas líneas se cortan en el centro del rectángulo, que denotamos por  $P$ . Este punto es el punto medio de ambas líneas. Los triángulos  $DAB$  y  $PEB$  son semejantes pues tienen dos ángulos en común. Por tanto  $a/b = (x/2)/(d/2) = x/d$  y  $d = bx/a$ . Sustituyendo en la igualdad que nos da el teorema de Pitágoras:  $x = a\sqrt{a^2 + b^2}/b$ . Como  $x = b$ ,  $b^4 = a^2(a^2 + b^2)$ . De aquí,

$$b^2 = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4a^4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}a^2.$$

Descartando la solución negativa,

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$