# Seminario de problemas. Curso 2016-17. Hoja 16

**Nota:** Todos los problemas de esta hoja están sacados de la sección «Divertimentos con Delantal» del blog del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Sevilla (divertimentos propuestos por Francisco Javier Carrillo, Manuel Delgado y Juan Núñez, con delantales de Antonio J. Durán). Disponible en `https://www.imus.us.es/blogdim/categoria/divertimentos-con-delantal/` Agradecemos al director del blog, Antonio J. Durán, su permiso para reproducir los problemas, y animamos al lector a que, en el futuro, siga el blog de manera regular.

**99. El problema de los políticos corruptos:** A un lujoso apartamento de la costa española han llegado cuatro políticos corruptos que acaban de recibir un grueso sobre lleno de billetes, fruto de su última pillería. Todavía exhaustos tras la pantagruélica comida con que han celebrado la operación, se echan a dormir una siesta. Al poco, uno de ellos, desconfiado (los políticos corruptos lo suelen ser), temiendo que los otros se despierten y se guarden algún billete, se levanta, hace cuatro partes iguales del total de billetes, se guarda su parte y deja el resto amontonado, echando además un billete que le había sobrado en una hucha que tenían para gastos varios. Al cabo de una hora, un segundo político se despierta y tiene la misma idea: hace cuatro partes iguales del total de billetes que encuentra, se guarda una parte, vuelve a amontonar el resto y echa otro billete que le había sobrado en la hucha. Al cabo de otra hora el tercer político hace exactamente la misma operación que el segundo y finalmente, el cuarto político efectúa la misma operación una hora más tarde, aunque en este caso no le sobra ningún billete para meter en la hucha.

Horas después, al levantarse de la siesta, deciden repartir los billetes (los que finalmente habían quedado en el sobre) entre los cuatro, cada uno de ellos pensando que ninguno de los otros tres se había dado cuenta de lo que él había hecho anteriormente.

Sabiendo que en este último reparto no ha sobrado ningún billete y que los políticos ya sabían que el sobre no contenía más de 1000 billetes, se pregunta:

¿Cuál es el número total de billetes que había en el sobre?

¿Con cuántos billetes se ha quedado cada político?

*Solución.*

Si $x$ es el número de billetes que han robado, las condiciones del problema son

$$\begin{cases} x = 4x_1 + 1, \\ 3x_1 = 4x_2 + 1, \\ 3x_2 = 4x_3 + 1, \\ 3x_3 = 4x_4, \\ 3x_4 = 4x_5, \end{cases}$$

donde $x_1, x_2, x_3, x_4$ representan, respectivamente, el número de billetes que se lleva cada uno que se va levantando, y $x_5$ es lo que se queda cada uno en el reparto que se hace por la mañana. Despejando $x_1$ en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera,

$$x = 4\Big(\frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}\Big) + 1 = 4\frac{4}{3}x_2 + \frac{4}{3} + 1.$$

Haciendo lo mismo con las sucesivas ecuaciones resulta

$$x = 4\left(\frac{4}{3}\right)^4 x_5 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} + 1,$$

de donde

$$x = 4\frac{256x_5 + 63}{81} + 1.$$

Para que $x$ sea entero, $256x_5 + 63$ tiene que ser múltiplo de 81, es decir,

$$256x_5 + 63 = 81K,$$

luego

$$256x_5 = 81K - 63 = 9(9K - 7).$$

Como 256 es primo con 9, entonces 256 es un divisor de $9K - 7$. Los primeros múltiplos de 256 son 256, 512, 768, 1024, 1280... El primero que es múltiplo de $9K - 7$ es 1280. Por tanto

$$256 \cdot 5 = 9 \cdot 143 - 7, \qquad 256 \cdot 45 = 9(9 \cdot 143 - 7).$$

Así pues,

$$x_5 = 45,\ x_4 = 60,\ x_3 = 80,\ x_2 = 107,\ x_1 = 143,\ x = 573.$$

Robaron 573 billetes y el reparto fue así:

El primero se llevó

$$x_1 + x_5 = 188 \text{ billetes},$$

el segundo se llevó

$$x_2 + x_5 = 152 \text{ billetes},$$

el tercero se llevó

$$x_3 + x_5 = 125 \text{ billetes},$$

y el cuarto recogió

$$x_4 + x_5 = 105 \text{ billetes}.$$

A la hucha fueron 3 billetes.

**100. El problema de la fiesta:** Se convoca una fiesta mediante las redes sociales a la que acuden doscientas personas, que pueden conocerse o no. Suponemos que si la persona A conoce a B, entonces B también conoce a A.

Justifica que hay al menos dos personas que conocen al mismo número de personas en la fiesta.

Justifica también que, si de entre las doscientas personas se escoge un grupo cualquiera de seis, hay al menos tres de ellas que se conocen entre sí o bien que no se conocen ninguna entre sí.

Si el lector sabe calcular cuál es el mínimo número de personas que hay que seleccionar para que obligatoriamente haya seis de ellas que o se conozcan todas entre sí o no se conozcan ninguna de ellas entre sí, ¡o se ha equivocado o es un genio!

*Solución.*

Supongamos que, de las 200 personas, una no conoce a ninguna de las 199 restantes; por tanto ninguna de estas la conoce a ella. De modo que cada una las personas conoce entre 0 y 198 personas. Si asociamos a cada una de las 200 personas el número de sus conocidos (que oscila entre 0 y 198), tiene que haber 2 con el mismo número de conocidos. Por otra parte, si todo el mundo conoce a alguien, se asocia a cada persona el número de sus conocidos, que ahora oscila entre 1 y 199, y se concluye igual.

Se selecciona un grupo de seis personas cualesquiera. Se escoge una de ellas, A, y se separan las otras cinco en dos grupos: los que conocen a la persona A y los que no. Uno de estos grupos tienen al menos 3 personas. Si el grupo con tres o más personas es el de los que conocen a A, puede ser que dos se conozcan, en cuyo caso estas dos y A forman las tres personas que se conocen. Si no hay dos que se conocen, es que hay al menos tres desconocidos. Si el grupo con más de tres personas es el de las que no conocen a A, puede ser que haya 3 que se conozcan entre sí, o bien que haya 2 que no se conocen, que junto con A forman la terna de desconocidos.

Este tipo de problemas permite definir los números de Ramsey: dados dos números $n$ y $m$, el número de Ramsey $R(n,m)$ se define como el mínimo número entero $N$ tal que en una reunión de $N$ personas siempre hay $n$ que se conocen entre sí o $m$ que no se conocen entre sí. En el párrafo anterior se ha demostrado que $R(3,3) \leq 6$. No es difícil probar que en realidad $R(3,3) = 6$. Se sabe que los números de Ramsey son siempre finitos, pero muy poco más acerca de ellos. Por ejemplo, sabemos que $R(4,4) = 18$, $R(4,5) = 25$, pero no sabemos el valor de $R(5,5)$, aunque sí que $43 \leq R(5,5) \leq 49$. El matemático Paul Erdös decía que si vinieran unos extraterrestres con la amenaza de que destruirían el planeta si no le decíamos cuánto vale $R(5,5)$, pondríamos a trabajar todos nuestros ordenadores, pero si lo que nos pidieran fuera $R(6,6)$ más bien deberíamos de pensar en cómo destruirlos a ellos.

Para saber más: E. Fernández y L. Roncal, Los números de Ramsey y el álgebra, *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* **15** (2012), 651–674.

**101. En ruta:** Un coche viaja desde A hasta B y vuelve por la misma carretera. Cuando circula cuesta arriba, va a 56 km/h, cuando circula cuesta abajo va a 72 km/h, y cuando está circulando en llano va a 63 km/h. Tarda 4 horas en ir desde A hasta B, y tarda 4 horas y 40 minutos en ir desde B hasta A. ¿Qué distancia hay entre A y B por la carretera recorrida?

La pregunta anterior no tiene respuesta única si las velocidades anteriores son tres números cualesquiera. ¿Qué relación deben cumplir dichas velocidades para que pueda obtenerse de forma única la distancia citada?

*Solución.*

Si denotamos por $x$, $y$ y $z$ los kilómetros cuesta arriba, cuesta abajo y en llano que hay desde A hasta B, respectivamente, se tendrá que, desde B a A, los kilómetros cuesta arriba, cuesta abajo y en llano serán $y$, $x$ y $z$. Usando que tiempo = espacio/velocidad, llegamos a las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{56} + \dfrac{y}{72} + \dfrac{z}{63} = 4, \\ \dfrac{x}{72} + \dfrac{y}{56} + \dfrac{z}{63} = \dfrac{14}{3}. \end{cases}$$

Resuelto el sistema en función de $z$, resulta ser

$$\begin{cases} x = 52.5 - \dfrac{1}{2}\,z, \\ y = 220.5 - \dfrac{1}{2}\,z, \end{cases}$$

de donde se sigue que la distancia entre A y B es

$$x + y + z = 273\,\text{km}.$$

Si las respectivas velocidades son $v_1$, $v_2$ y $v_3$, y los tiempos de viaje desde A hasta B y desde B hasta A son respectivamente $t_1$ y $t_2$, el anterior sistema se reduce a

$$\begin{cases} \dfrac{x}{v_1} + \dfrac{y}{v_2} + \dfrac{z}{v_3} = t_1, \\ \dfrac{x}{v_2} + \dfrac{y}{v_1} + \dfrac{z}{v_3} = t_2, \end{cases}$$

que resuelto en función de $z$ queda

$$\begin{cases} x = M(v_1, v_2, t_1, t_2) - \dfrac{v_1 v_2}{v_3(v_1 + v_2)}\,z, \\ y = N(v_1, v_2, t_1, t_2) - \dfrac{v_1 v_2}{v_3(v_1 + v_2)}\,z \end{cases}$$

(la expresión concreta de $M$ y $N$ no tiene relevancia). La distancia entre las tres ciudades es

$$x + y + z = M(v_1, v_2, t_1, t_2) + N(v_1, v_2, t_1, t_2) + z\left(1 - \frac{2v_1v_2}{v_3(v_1 + v_2)}\right).$$

El problema tendrá solución única cuando se cumpla la relación

$$v_3 = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2},$$

es decir, cuando $v_3$ sea la media armónica de $v_1$ y $v_2$.

**102. Una cuestión de tiempo:** Hay personas a las que no les gusta decir su edad. Una de ellas solo dice que si el cumpleaños se celebrara únicamente, como debiera ser, cuando coincidiera el día del año y el día de la semana en que uno nació, el verano de 2016 habría cumplido 9 años. ¿Qué edad tiene?

*Solución.*

Supongamos que el día de nacimiento es un lunes (daría igual con cualquier otro día de la semana). Al ser 2016 bisiesto y los días del verano posteriores al 29 de febrero, ese día de 2015 será sábado. Los años anteriores será

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2015 | Sábado | 2008 | Viernes | 2001 | Miércoles | 1994 | Lunes |
| 2014 | Viernes | 2007 | Miércoles | 2000 | Martes | 1993 | Domingo |
| 2013 | Jueves | 2006 | Martes | 1999 | Domingo | 1992 | Sábado |
| 2012 | Miércoles | 2005 | Lunes | 1998 | Sábado | 1991 | Jueves |
| 2011 | Lunes | 2004 | Domingo | 1997 | Viernes | 1990 | Miércoles |
| 2010 | Domingo | 2003 | Viernes | 1996 | Jueves | 1989 | Martes |
| 2009 | Sábado | 2002 | Jueves | 1995 | Martes | 1988 | Lunes |

El cumpleaños vuelve a ser lunes de un año bisiesto y el ciclo se repite. Así, en este periodo de $5+6+11+6=28$ años, hay 4 cumpleaños. El siguiente ciclo de 28 años (con 4 cumpleaños) nos llevaría a 1960. El siguiente cumpleaños nos lleva a 1955, que es el año de nacimiento de la persona, que ha cumplido 61 años.

**103. El reloj con dos minuteros:** Un relojero coloca dos agujas idénticas como horario y minutero en un reloj. Suponiendo que cualquiera puede dar la hora observando el cielo con un error inferior a seis horas, ¿cuál es el error máximo que podemos cometer al dar la hora con ese reloj?

*Solución.*

Denotemos por $x$ e $y$ a la posición de las agujas, con $0 \le x, y < 12$.

El minutero proporciona una información redundante, pues si $\eta$ denota al minutero y $\xi$ a la aguja horaria, se cumplirá $\{\xi\} = \eta/12$, donde $\{\xi\}$ es la parte fraccionaria de $\xi$. Escribiremos esta relación en la forma

$$\eta - 12\{\xi\} = 0.$$

Así, tenemos uno de los siguientes casos:

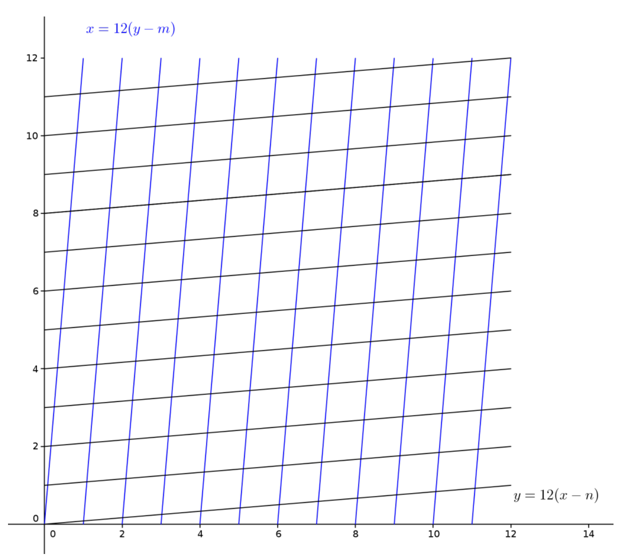
- $y - 12\{x\} \neq 0$ y $x - 12\{y\} = 0$. En este caso, la aguja $y$ es horaria, y podemos determinar la hora exactamente.
- $y - 12\{x\} = 0$ y $x - 12\{y\} \neq 0$. Este caso es simétrico al anterior.
- $y - 12\{x\} = 0$ y $x - 12\{y\} = 0$. En este caso, el reloj no determina unívocamente la hora.

Solo tenemos que analizar el tercer caso, pues es el único que no nos permite saber qué aguja marca las horas y cuál los minutos.

Las ecuaciones $y - 12\{x\} = 0$ y $x - 12\{y\} = 0$ se corresponden con 24 rectas de la forma

$$\begin{aligned} y &= 12(x-n), \qquad n \le x < n+1, \qquad 0 \le n < 11, \\ x &= 12(y-m), \qquad m \le y < m+1, \qquad 0 \le m < 11, \end{aligned}$$

que se cortan en los 143 puntos del retículo:



Cada uno de estos puntos se corresponden con la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = 12(x-n), \\ x = 12(y-m), \end{cases}$$

que viene dada por la pareja de valores

$$x = \frac{12}{143}(m+12n), \qquad y = \frac{12}{143}(n+12m).$$

Por tanto, el error máximo que podemos cometer al estimar la hora es

$$|x-y| = \frac{12}{143}|11m-11n| = \frac{12}{13}|n-m| = \frac{12}{13}k, \qquad k = 1, \ldots, 11.$$

Si además suponemos que el error es inferior a seis horas, el valor máximo se obtiene para $k=6$, es decir,

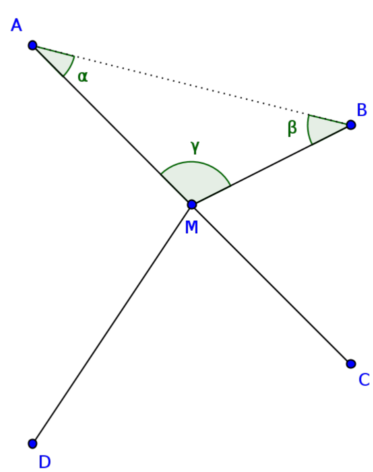
$$|x-y| \leq \frac{72}{13}$$

horas, que son 5 horas, 32 minutos y 18 y 6/13 partes de segundo.

**104. Ciudades de Europa:** En el mapa de Europa conectamos cada ciudad con la que esté más próxima. Si suponemos que las distancias entre ciudades son siempre distintas, mostrar que ninguna ciudad estará conectada con más de cinco ciudades vecinas.

*Solución.*

Supongamos que la ciudad $M$ es la más próxima a las ciudades $A, B, C, D, E, \ldots$ Se puede suponer que estas ciudades están ordenadas en sentido horario, con centro en $M$, y comenzando en $A$.




Tracemos el segmento que une las ciudades $A$ y $B$. En el triángulo $ABM$, el lado mayor es $AB$; en caso contrario, $A$ estaría más cerca de $B$ que de $M$. Por tanto, $\gamma > \alpha$ y $\gamma > \beta$, y se tiene que

$$3\gamma > \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

La desigualdad anterior implica que $\gamma > 60^\circ$. El mismo razonamiento se puede hacer para los triángulos $BCM$, $CDM \ldots$, con un ángulo en el vértice $M$ siempre mayor que $60^\circ$. Se deduce que, como máximo, son cinco los triángulos con el vértice común en $M$, es decir, $M$ no puede ser la ciudad más próxima a más de cinco ciudades.