Seminario de problemas Curso 2022-23. Hoja 15

124. ¿Por qué número racional positivo habría que dividir las fracciones $9/10$ y $7/8$ para obtener dos números naturales consecutivos?

Solución.

Si escribimos las dos fracciones de manera que tengan el mismo denominador, resulta

$$\frac{9}{10} = \frac{36}{40}, \qquad \frac{7}{8} = \frac{35}{40}.$$

Por tanto, si las dividimos por $1/40$, obtenemos los números naturales consecutivos 35 y 36.

125. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números enteros positivos, de la que sabemos que

$$a_{n+m} = a_n + a_m + n \cdot m, \qquad a_3 = 6.$$

¿Qué vale a_{31}? ¿y a_n en general?

Solución.

Como $a_3 = 6$, se tiene

$$a_2 = a_{1+1} = 2a_1 + 1, \quad a_3 = a_{1+2} = a_1 + a_2 + 2 = 3a_1 + 3 = 6, \longrightarrow a_1 = 1.$$

Observemos ahora que, si tomamos $m = 1$, entonces

$$a_{n+1} = a_n + a_1 + n \cdot 1 = a_n + (n+1).$$

Aplicando reiteradamente la fórmula anterior, obtenemos

$$a_{n+1} = a_{n-1} + n + (n+1) = a_{n-2} + (n-1) + n + (n+1) = \cdots = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1).$$

Es decir, $a_n = 1 + 2 + \cdots + n$, que corresponde a la suma de los números de 1 hasta n. Ahora bien, escribiendo la suma en orden inverso, resulta

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n & & \\
a_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 & & \\
\hline
2a_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) & = & n(n+1)
\end{array} \; +$$

De aquí obtenemos $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ y $a_{31} = \dfrac{31 \cdot 32}{2} = 496$.

126. Prueba que, si un número entero se puede poner como suma de dos cuadrados, entonces su doble también. Y viceversa, si el doble de un número se puede poner como suma de dos cuadrados, entonces dicho número también.

Solución.

Podemos probar con algunos ejemplos:

$$5 = 1^2 + 2^2, \quad 10 = 1^2 + 3^2, \quad 20 = 2^2 + 4^2, \quad 40 = 2^2 + 6^2.$$

$$13 = 2^2 + 3^2, \quad 26 = 1^2 + 5^5, \quad 52 = 4^2 + 6^2, \quad 104 = 2^2 + 10^2.$$

Como vemos, parece que se cumple. La cuestión es ver qué relación hay entre los dos cuadrados que forman el número n y los dos que forman el $2n$. Tras un poco de observación, nos damos cuenta de que estos números son la suma y la resta de los anteriores. En efecto, si $n = a^2 + b^2$, con $b \geq a$, entonces

$$(a+b)^2 + (b-a)^2 = a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + b^2 - 2ab = 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2) = 2n.$$

El recíproco también es cierto. Si $2n = a^2 + b^2$, es fácil comprobar que

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{2n}{2} = n.$$

Solo queda ver que $\frac{a+b}{2}$ y $\frac{b-a}{2}$ son números enteros. Pero eso es cierto, ya que a y b tienen la misma paridad, al ser la suma de sus cuadrados un número par.

127. Calcula el valor de la siguiente suma de fracciones

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2023}}.$$

Solución.

Basta ver que cada una de las fracciones se puede escribir como

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

Por tanto, la suma que debemos calcular es equivalente a la siguiente suma

$$(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{2023}-\sqrt{2022}).$$

Como vemos, todos los sumandos se cancelan excepto dos

$$(\cancel{\sqrt{2}}-1) + (\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}) + (\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}}) + \cdots + (\sqrt{2023}-\cancel{\sqrt{2022}}).$$

Así pues, la suma es igual a $\sqrt{2023}-1$.

128. Una secuencia *maravillosa* es una secuencia de 1's y 0's que no tiene dos 1's consecutivos. Por ejemplo, el conjunto de todas las secuencias *maravillosas* de longitud 3 es $\{[1,0,0],[1,0,1],[0,1,0],[0,0,1],[0,0,0]\}$. Determina el número de secuencias *maravillosas* de longitud 7.

Solución.

Podríamos intentar construir todas las secuencias maravillosas de longitud 7, pero es probable que nos dejáramos alguna. Es mejor intentar idear un método que nos permita contar las secuencias de cualquier longitud. La manera en que lo podemos hacer es pensando en cómo construir secuencias de una determinada longitud a partir de las anteriores. Así, si a_n es el total de secuencias maravillosas de longitud n, vamos a ver cómo encontrar a_{n+1}, el total de secuencias maravillosas con longitud $n+1$. Es evidente que, si a una secuencia maravillosa de longitud n le añadimos un 0 al final, seguimos teniendo una secuencia maravillosa, pero ahora de longitud $n+1$. Sin embargo, solo podemos añadir un 1 al final si la secuencia de longitud n acaba en 0, que serán todas las secuencias maravillosas de longitud $n-1$. Por lo tanto,

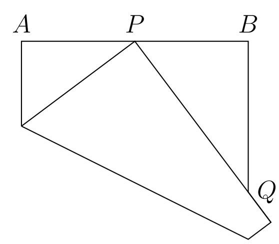
$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

Esta es una relación de recurrencia que nos permite obtener el total de secuencias maravillosas a partir de las dos anteriores. Basta por tanto contar las secuencias maravillosas de longitudes 1 y 2. Ahora bien, de longitud 1, hay dos secuencias [0], [1] y, de longitud 2, tres secuencias $[0,0]$, $[1,0]$, $[0,0]$. Ahora ya estamos en disposición de obtener a_7

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5, \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8, \\ a_5 &= a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13, \\ a_6 &= a_5 + a_4 = 13 + 8 = 21, \\ a_7 &= a_6 + a_5 = 21 + 13 = 34. \end{aligned}$$

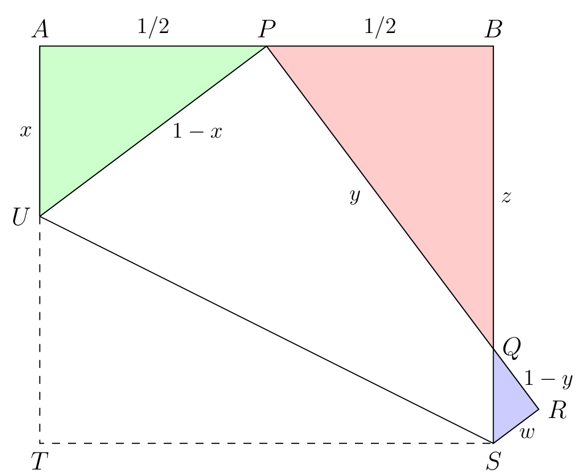
Esta sucesión de números se conoce como *sucesión de Fibonacci*, quien la dio a conocer en el libro *Liber Abaci*, publicado en 1202, en el que aparecía como solución a un problema de la cría de conejos.

129. Consideramos un cuadrado $ABCD$ de lado 1, y sea P el punto medio del lado AB. Doblamos el cuadrado de manera que el punto D lo llevamos a P y sea Q el punto de intersección del lado AD con el lado BC. ¿Cuánto mide el segmento BQ? ¿Cuál es el área de la parte doblada correspondiente a la parte trasera del cuadrado?



Solución.

Fijémonos en los triángulos coloreados de la figura, todos ellos rectángulos y semejantes entre sí



Para el triángulo verde APU, por el Teorema de Pitágoras, se tiene

$$(1-x)^2 = x^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow 1 + x^2 - 2x = x^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{8}.$$

Como los triángulos rojo y verde son semejantes, resulta

$$\frac{z}{1/2} = \frac{1/2}{x} \Rightarrow z = \frac{1}{4x} = \frac{2}{3},$$

por lo que el segmento BQ es igual a $2/3$. Por otra parte,

$$\frac{y}{1/2} = \frac{1-x}{x} \Rightarrow y = \frac{1-x}{2x} = \frac{5}{6}.$$

Considerando ahora el triángulo azul, se tiene

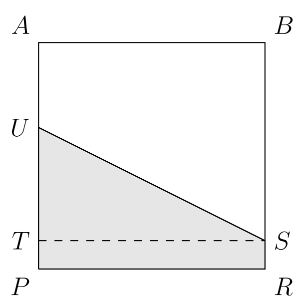
$$\frac{w}{1-y} = \frac{x}{1/2} \Rightarrow w = 2x(1-y) = \frac{1}{8},$$

de donde deducimos que el segmento AT es igual a $7/8$.

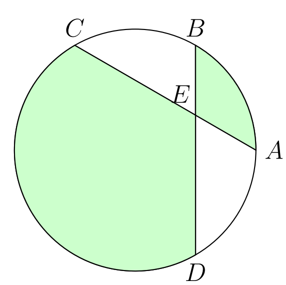
Si denotamos el área de un polígono de vértices X_1, X_2, $\ldots$, X_n como $[X_1 X_2 \cdots X_n]$, entonces,

$$[UPRS] = [ABST] - [APU] - [PBQ] - [STU] + [QRS] = \frac{7}{8} - \frac{3}{32} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{96} = \frac{3}{8}.$$

El resultado anterior se puede obtener también si nos damos cuenta de que, si desdoblamos el papel, entonces $[UPRS] = [UST] + [PRST] = 1/4 + 1/8 = 3/8$.

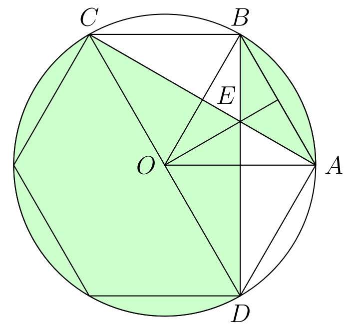


130. En la siguiente circunferencia las longitudes de los arcos AB, BC, CD y DA son, respectivamente, π, π, 3π y π. Determina el área de las regiones sombreadas: $[EAB] + [ECD]$.



Solución.

De las longitudes de los arcos, se deduce que la longitud de la circunferencia es 6π y, por lo tanto, su radio 3. Como π es la sexta parte de toda la circunferencia, podemos inscribir un hexágono regular, de manera que cuatro de sus vértices conincidan con A, B, C y D. De este modo, si O es el centro de la circunferencia, el triángulo OAB es equilátero de lado 3, como se ve en la figura.



De aquí, es fácil ver que $[EAB]$ es el área del sector circular OAB menos dos tercios el área del triángulo equilátero OAB. Es decir,

$$[EAB] = \frac{3\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Por otra parte $[ECD]$ es el área de medio círculo más el área de un triángulo de base $CD = 6$ y altura OE, que es $2/3$ la altura del triángulo OAB. Por tanto,

$$[ECD] = \frac{9\pi}{2} + 3\sqrt{3}.$$

Finalmente,

$$[EAB] + [ECD] = 6\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$