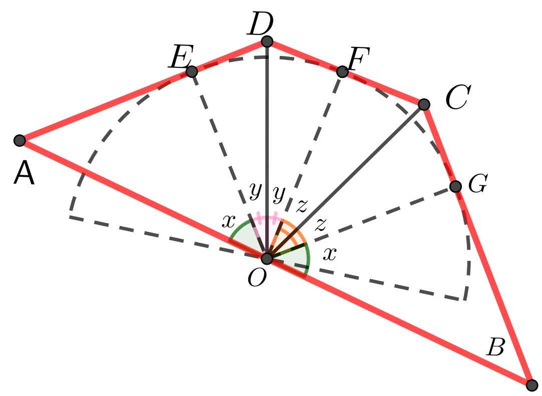
137. Como se muestra en la figura, el cuadrilátero $ABCD$ tiene las siguientes propiedades:

a) El punto medio O del lado AB es el centro de un semicírculo;

b) Los lados AD, DC, y CB son tangentes a dicho semicírculo.

Probar que
$$AB^2 = (4AD)\,BC.$$



Solución. Utilizamos las notaciones del dibujo adjunto. Como la semicircunferencia es tangente al cuadrilátero en E y F, los triángulos rectángulos OED y OFD son congruentes. Con iguales argumentos, son congruentes los triángulos OFC y OGC. También como $OA = OB$ y $OE = OG$, los triángulos rectángulos OEA y OGB son congruentes. Por tanto,
$$2x + 2y + 2z = 180^\circ \Rightarrow x + y + z = 90^\circ;$$
de donde,
$$\angle OAE = y + z, \quad \angle ODE = x + z, \quad \angle OBC = y + z, \quad \angle OCB = x + y,$$
$$\angle AOD = x + y, \quad \angle BOC = x + z.$$
Por tanto, los triángulos OAD y CBO son semejantes. De donde,
$$\frac{OA}{BC} = \frac{AD}{OB} \Leftrightarrow OA \cdot OB = AD \cdot BC \Leftrightarrow \frac{AB}{2}\frac{AB}{2} = AD \cdot BC,$$
que equivale a lo queremos probar.

138. Sea n un número natural y sean los $n+1$ números distintos $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ en $1, 2, \ldots, 2n$. Probar que existen $i \neq j$ tales que a_i divide a a_j.

Solución. Cada número $a_j = 2^{i_j} b_j$, con $i_j \geq 0$ y b_j impar, $b_j < 2n$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$. Como hay n números impares en $1, 2, \ldots, 2n$, existen $j \neq k$ tales que $b_j = b_k$; y si $j < k$, entonces a_j divide a a_k.

139. Sean a, b, c las raíces de la ecuación

$$x^3 - x - 1 = 0.$$

Calcular

$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c}.$$

Solución. Si $y = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{y+1}$. De modo que si $P(x) = x^3 - x - 1$,

$$P(\frac{y-1}{y+1}) = \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 - \frac{y-1}{y+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{(y-1)^3 - (y-1)(y+1)^2 - (y-1)^3}{(y+1)^3} = 0,$$

se anula para $y_1 = \frac{1+a}{1-a}$, $y_2 = \frac{1+b}{1-b}$, $y_3 = \frac{1+c}{1-c}$.

Así, $\frac{1+a}{1-a}$, $\frac{1+b}{1-b}$, $\frac{1+c}{1-c}$ son raíces de la ecuación

$$(y-1)^3 - (y-1)(y+1)^2 - (y-1)^3 = 0 \Leftrightarrow y^3 + 7y^2 - y + 1 = 0.$$

Por la fórmula de Cardano-Vieta

$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} = -7.$$

140. Determinar una familia infinita de números enteros positivos a, b, c, d que sean solución de la ecuación

$$a^4 + b^5 + c^6 = d^7.$$

Solución. Se tiene

$$3^n + 3^n + 3^n = 3^{n+1}.$$

De modo que si $n+1$ es múltiplo de 7 y n es múltiplo de $60 = m.c.m.(4, 5, 6)$, entonces

$$3^n = 3^{4k_n} = (3^{k_n})^4 = a_n^4,\ 3^n = 3^{5k_n} = (3^{k_n})^5 = b_n^5,\ 3^n = 3^{6j_n} = (3^{j_n})^6 = c_n^6$$

y

$$a_n^4 + b_n^5 + c_n^6 = 3^n + 3^n + 3^n = 3^{n+1} = 3^{7\ell_n} = d_n^7.$$

donde $d_n = 3^{\ell_n}$.

Si $n = 60i$, $n+1 = 60i+1$ y tomamos $i = 7m-2, m = 1, 2, \ldots$ concluimos que los números

$$a_m = 3^{15(7m-2)},\ b_m = 3^{12(7m-2)}\ c_m = 3^{10(7m-2)},\ d_m = 3^{(60(7m-2)+1)/7},$$

tienen la propiedad,

$$a_m^4 + b_m^5 + c_m^6 = 3^{60(7m-2)} + 3^{60(7m-2)} + 3^{60(7m-2)} = 3^{60(7m-2)+1} = (3^{(60(7m-2)+1)/7})^7 = d_n^7.$$

141. Del conjunto de números naturales $1, 2, \ldots, n$, se eliminan tres números que forman una progresión geométrica. La suma resultante es 6125. Determinar el menor valor de n y la progresión geométrica de tres términos para los que esto es posible.

Solución. Se tiene

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Los tres números que forman una progresión geométrica tienen la forma a, ar, ar^2. Así,

$$a + ar + ar^2 + 6125 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

De modo que

$$6125 < \frac{n(n+1)}{2}.$$

El menor número n que cumple la desigualdad anterior es $n = 111$. Por tanto,

$$a + ar + ar^2 = a(1 + r + r^2) = 111(112)/2 - 6125 = 91 = 7 \cdot 13.$$

Tenemos dos casos r entero, en ese caso, tenemos $a = 1$, $r = 9$; $a = 7$, $r = 3$; $a = 13$, $r = 2$. El otro caso, $r > 1$ racional. Si $r = \frac{d}{c}$, con $d > c \geq 2$ primos relativos. Como $a\frac{d^2}{c^2}$ es entero y c no tiene factores comunes con d, c^2 divide a a. Si $a = c^2 k$,

$$a(c^2 + cd + d^2) = 91c^2 \Rightarrow k(c^2 + cd + d^2) = 91.$$

Como $c \geq 2$ y $d \geq 3$, $(c^2 + cd + d^2) \geq 19$, la única solución es $k = 1$, $(c^2 + cd + d^2 = 91$; es decir, $d = 6$, $c = 5$, $a = 25$.

Concluyendo, $n = 111$ y las progresiones son:

$$1, 9, 81; \quad 7, 21, 63; \quad 13, 26, 52; \quad 25, 30, 36.$$

142. Sean a, b, c números positivos tales que $a + b + c = 3$. Probar que

$$\frac{a}{b(2c+a)} + \frac{b}{c(2a+b)} + \frac{c}{a(2b+c)} \geq 1.$$

Solución. Aplicando dos veces la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{a}{b(2c+a)} + \frac{b}{c(2a+b)} + \frac{c}{a(2b+c)} &\geq 3\frac{1}{\sqrt[3]{(2c+a)(2a+b)(2b+c)}} \\ &\geq 3\frac{3}{(2c+a)+(2a+b)+(2b+c)} = 1. \end{aligned}$$

143. Hallar todos los números enteros positivos n para los cuales todos enteros con n dígitos que contienen $n-1$ dígitos iguales a 1 y 1 siete son primos.

Solución. Los valores de n para los que todos los números con n dígitos y que contienen $n-1$ dígitos iguales a 1 y 1 siete corresponden a números primos son: $n = 1$ y $n = 2$, porque 7, 17 y 71 son números primos; todos los números con dos 1 y un 7 son múltiplos de 9.

$n = 4$ no funciona porque $1711 = 29 \cdot 59$. Tampoco $n = 5$, porque $11711 = 7 \cdot 1763$.

Si $n = 6k$ o $n = 6k + 3$, entonces la suma de los dígitos del número es $n + 6$, que es divisible por 3.

Como $1001 = 10^3 + 1 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, el número

$$N \cdot 10^3 + m$$

es divisible por 7, 11 o 13 si y solo si $N - m$ lo es por 7, 11 o 13, respectivamente.

Así, el número

$$7\underbrace{11\ldots1}_{6k}$$

es divisible por 7.

Si $n = 6k + 2$, como $n \geq 5$, entonces realmente, $n = 6k' + 8$ con $k' \geq 0$. El número

$$11171111\underbrace{11\ldots1}_{6k'}$$

es divisible por 7, porque $11171 - 111 = 11060$, $60 - 11 = 49$, que es divisible por 7.

Si $n = 6k + 4$,

$$7111\underbrace{11\ldots1}_{6k}$$

es divisible por 13.

Finalmente, si $n = 6k + 5$,

$$11711\underbrace{11\ldots1}_{6k}$$

es divisible por 7.