Seminario de problemas Curso 2022-23. Hoja 14

118. Dados dos números reales, a, b, sabemos que las tres raíces del polinomio

$$x^3 + \sqrt{3}(a-1)x^2 - 6ax + b$$

son reales. Probad que $|b| \leq |1+a|^3$.

Solución. Llamamos x_1, x_2, x_3 a las raíces del polinomio. Gracias a las relaciones de Cardano-Vieta se tiene que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\sqrt{3}(a-1), \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= -6a, \\ x_1x_2x_3 &= -b. \end{aligned}$$

Si hacemos notar que

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

obtenemos que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3(a-1)^2 + 6a = 3(a+1)^2.$$

Denotamos $y_1 = |x_1|$, $y_2 = |x_2|$, $y_3 = |x_3|$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{y_1y_2y_3} &= \sqrt[3]{|b|}, \\ \sqrt{\frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{3}} &= |a+1|. \end{aligned}$$

Gracias a la desigualdad entre medias geométrica y cuadrática,

$$\sqrt[3]{|b|} \leq |a+1|$$

que conduce a

$$|b| \leq |a+1|^3.$$

119. Dado n número entero, $n \geq 3$, consideremos un polígono regular de n lados. Tenemos una serie de fichas distribuidas entre sus vértices, quizás varias en cada uno de ellos, y las movemos varias veces. En cada movimiento cambiamos de posición exactamente dos fichas, y movemos, cada una de ellas a un vértice contiguo al que se encontraba. Inicialmente, tenemos $n-1$ fichas en uno de los vértices, que llamamos V. Hallad para qué valores de n podemos colocar una ficha en cada uno de los vértices, excepto en V.

Solución. Si n es par escribimos $n = 2k$. Si es impar escribimos $n = 2k - 1$.

Llamamos V al vértice en el que están las n fichas. Llamamos $V_1, \ldots, V_{k-1}$ a los vértices que están a un lado de V, numerándolos en función de su cercanía a V. De igual modo, llamamos $B_1, \ldots, B_{k-1}$ a los vértices que están al otro lado.

Si n es impar hemos nombrado todos los vértices. En caso de que n sea par, tenemos que considerar otro vértice, el opuesto a V, que llamamos B.

Consideramos el siguientes proceso:

- Repetimos $2k-2$ veces el te proceso de colocar una bola en B_1 y otra en V_1. Así logramos tener $k-1$ bolas en B_1 y $k-1$ bolas en V_1.
- Repetimos $2k-4$ veces el te proceso de colocar una bola en B_1 y otra en V_1. Así logramos tener una bola en B_1, una bola en V_1, $k-2$ bolas B_2 y $k-2$ bolas en V_2.
- Reiterando conseguimos una bola en cada vértice $B_1, \ldots, B_{n-1}, V_1, \ldots, V_{n-1}$.

Si n es impar, ya tenemos una bola en cada vértice excepto en V.

Si n es par, consideramos, a partir de la situación ya lograda, el siguientes proceso.

- Llevamos una bola de B_{k-1} a B, y otro de B_{k-2} a B_{k-1}. Así hay bolas en todos los vértices excepto en B_{k-2}.
- Llevamos una bola de B_{k-3} a B_{k-2}, y otro de B_{k-4} a B_{k-3}. Así hay bolas en todos los vértices excepto en B_{k-4}.
- Reiterando el proceso, logramos, para k par, una bola en cada vértice excepto en V. (Para k impar logramos una bola en cada vértice excepto en B_1.)

Por tanto el objetivo puede lograrse tanto para n impar como para n múltiplo de 4.

Veamos que para n par no múltiplo de 4 no es posible llegar a la configuración deseada. Tomamos un tal número n y suponemos que es posible llegar al objetivo.

Puesto que n es par, podemos colorear alternativamente de blanco y negro los vértices, de modo que V es blanco.

Llamamos d a la diferencia de número de fichas entre vértices blancos y negros.

En cada paso, d queda invariante, sube 4 unidades o baja cuatro unidades.

Por tanto la diferencia de los números d en dos estados distintos es múltiplo de 4.

En el estado inicial $d = n - 1$.

En el estado final $d = -1$.

Por tanto $n - 1 - (-1) = n$ es múltiplo de 4, una contradicción.

120. Un cierto número de colegios se enfrentan en un torneo de tenis. Los alumnos de un mismo colegio no juegan entre sí. Todos los alumnos procedentes de colegios diferentes juegan exactamente un partido entre ellos. Llamamos individuales a los partidos entre jugadores del mismo sexo, e individuales mixtos a los partidos entre jugadores de distinto sexo. Sabemos que el número total de chicos difiere del de chicas, como mucho, en una unidad. Sabemos que, igualmente, el número total de partidos individuales difiere del de partidos individuales mixtos, como mucho, en una unidad. Hallad el número máximo de colegios representados por un número impar de alumnos.

Solución. Llamamos n al número de colegios. Llamamos $g_1, \ldots, g_n$ al número de chicas de cada colegio. Llamamos $b_1, \ldots, b_n$ al número de chicos de cada colegio. Tomamos

$$d_i = g_i - b_i.$$

La diferencia entre el número total de chicas y el de chicos es

$$D = d_1 + \cdots + d_n,$$

y vale -1, 0 o 1.

El número de partidos individuales es

$$I = g_1g_2 + g_1g_3 + g_2g_3 + \cdots + b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 + \cdots .$$

El número de partidos mixtos es

$$M = b_1g_2 + b_2g_1 + b_1g_3 + b_3g_1 + b_2g_3 + b_3g_2 + \cdots .$$

Utilizamos que $(a-b)(c-d) = ac+bd-bc-ad$. La diferencia entre partidos individuales y mixtos, la expresamos como

$$E = d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3 + \cdots ,$$

y vale -1, 0 o 1.

Consideramos

$$F = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \cdots$$

y notamos que

$$F = D^2 - 2E.$$

Por tanto, F toma valores enteros entre -2 y 3. Como $F \geq 0$, en realidad toma valores enteros entre 0 y 3.

Luego hay un máximo de 3 colegios con un número distinto de chicos que chicas. En consecuencia, hay un máximo de 3 colegios representados por un número impar de alumnos.

Veamos que el número 3 puede alcanzarse. Consideramos tres colegios, dos representados por una chica y ningún chico, el otro representado por un chico y ninguna chica. En ese caso $D = 1$, $I = 1$, $M = 2$. Luego $E = -1$.

121. Las alturas de un triángulo ABC se cortan en un punto H. Sabemos que $AB = CH$. Determinad el valor del ángulo BCA.

Solución. Consideramos el punto de corte de AH con CB, que llamamos R.

Comparamos los triángulos ARB, CRH. Ambos son rectángulos en R. Los ángulos en A y en C son, ambos, complementarios del ángulo en B del triángulo original. Luego son iguales. Por tanto, los triángulos ARB, CRH son semejantes.

Como $AB = CH$, los triángulos ARB, CRH son iguales. Luego $AR = CR$.

El triángulo ARC es rectángulo isósceles en R. Su ángulo en C es $\pi/4$. Ese ángulo es el ángulo en C de ABC. Por tanto, este útltimo vale $\pi/4$.

122. Probad que un número x es racional si y sólo si la progresión aritmética

$$x,\ x+1,\ x+2, x+3, \ldots, x+n, \ldots$$

tiene tres términos distintos que forman una progresión geométrica.

Solución. Hay tres tales números en progresión geométrica si y solo si hay dos números enteros positivos m y n tales que

$$\frac{x+m+n}{x+m} = \frac{x+m}{x}.$$

Esta expresión es equivalente a que $n \neq m$ y se cumpla

$$x = \frac{m^2}{n-m}.$$

Puesto que $m^2/(n-m)$ es racional la la parte 'si' de la afirmación se cumple. Para comprobar la otra implicación, distinguimos entre si $x = 0$ y si $x \neq 0$. En el primer caso escribimos

$$x = 0 = \frac{0^2}{1-0}.$$

Así pues, basta tomar $m = 0$ y $n = 1$. En el segundo caso escribimos $x = p/q$ con p y q enteros no nulos. Se tiene,

$$x = \frac{p}{q} = \frac{p^2}{pq} = \frac{p^2}{pq+p-p}.$$

Así pues, basta tomar $m = p$ y $n = pq + p$.

123. Hallad todos los números primos p, q (mayores que 1) tales que

$$p^2 + q = 37q^2 + p.$$

Solución. En caso de que $p = q$ se tiene que

$$36p^2 = 0.$$

Luego $p = 0$. Esta contradicción demuestra que $p \neq q$. Intentamos ahora buscar una cota superior para alguno de los números implicados en la igualdad. Se tiene que

$$p(p-1) = q(37q-1).$$

Por tanto q divide a $p-1$. Sea $a \in \mathbb{N}$ tal que $p - 1 = aq$, de modo que

$$p = 1 + aq.$$

En términos de a y q la expresión se escribe como

$$a(1 + aq) = 37q - 1,$$

que equivale a

$$a + 1 = (37 - a^2)q.$$

Centrándonos en los posibles valores que toma a, deducimos $37 - a^2 > 0$ y, entonces,

$$37 - a^2 \leq 1 + a.$$

La primera condición nos da $1 \leq a \leq 6$. De estos seis números, solo $a = 6$ cumple la segunda. Por tanto, ha de ser $a = 6$. Con esta información, la identidad se transforma en

$$7 = q.$$

Por tanto, la única posible solución es $p = 43$ y $q = 7$. Puesto que ambos números son primos este par de valores es, efectivamente, solución.