Seminario de problemas. Curso 2021-22. Hoja 14. Soluciones

89. Encontrar todos los pares de enteros positivos (x, y) tales que

$$x^2 - 31\, y! = 2023.$$

Solución. Si $y = 1$, 2054 no es un cuadrado perfecto.

Si $y = 2$, 2085 no es un cuadrado perfecto.

Si $y = 3$, $2023 + 6 \times 31 = 2209 = 47^2$, $x = 47$.

Si $y > 3$ es $311 \times y! = \dot{4}$.

En $\frac{\mathbb{Z}}{\text{mód } 4}$ tenemos

x	x^2
0	0
1	1
2	0
3	1

Como $2023 \equiv 3 \mod 4$ es imposible que $x^2 \equiv 3 \mod 4$. La única solución es $x = 47$, $y = 3$.

90. Sean a, b números reales. Supongamos que la ecuación en x

$$x^4 + a\, x^3 + 2\, x^2 + b\, x + 1 = 0$$

tiene, al menos, una raíz real. Probar que

$$a^2 + b^2 \geq 8.$$

Solución.

Sea $t \in \mathbb{R}$ tal que $t^4 + a\, t^3 + 2\, t^2 + b\, t + 1 = 0$; observar que $t \neq 0$. Entonces

$$a\, t^3 + b\, t = -(1 + 2t^2 + t^4).$$

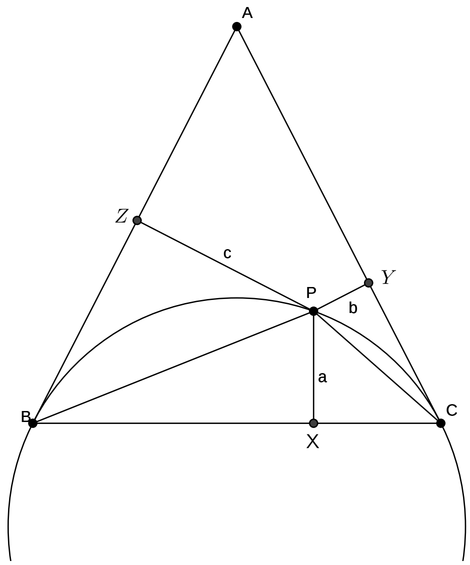
Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene

$$1 + 2t^2 + t^4 \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{t^6 + t^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(1 + t^2)^4}{t^6 + t^2}.$$

Para demostrar lo que nos piden basta ver que para todo $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, $\frac{(1+t^2)^4}{t^6+t^2} \geq 8 \Leftrightarrow (1 - t^2)^4 \geq 0$.

91. El triángulo ABC es un isósceles con AB=AC. Sea P un punto cualquiera de la circunferencia tangente a los lados AB en B y AC en C. Denotemos por a, b y c a las distancias de P a los lados BC, AC y AB respectivamente. Probar que $a^2 = bc$. (OME 2006.)

Solución.



Como AB es tangente a la circunferencia en B, tenemos que $\angle ABP = \angle PCB$. Análogamente, $\angle ACP = \angle PBC$. Por tanto, los triángulos rectángulos ΔBZP y ΔCXP son semejantes, así como los triángulos ΔBXP y ΔCYP.

De la semejanza de los triángulos ΔBZP y ΔCXP se obtiene que

$$\frac{a}{PC} = \frac{c}{PB},$$

y de la semejanza de los triángulos ΔBXP y ΔCYP deducimos que

$$\frac{a}{PB} = \frac{b}{PC}.$$

De donde,

$$c = \frac{a \cdot PB}{PC}, \quad b = \frac{a \cdot PC}{PB},$$

y multiplicando ambas igualdades obtenemos $a^2 = bc$.

92. La suma de cinco números reales es 8 y la suma de sus cuadrados es 16. ¿Cuál es mayor valor posible de uno de esos números?

Solución. Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene

$$(8 - x_1)^2 = (x_2 + \ldots + x_5)^2 \leq 4(x_2^2 + \ldots + x_5^2) = 4(16 - x_1^2),$$

que equivale a

$$5x_1^2 - 16x_1 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x_1 \leq \frac{16}{5}.$$

El mayor valor posible es $16/5$ y los otros cuatro valores iguales a $6/5$.

93. Probar que para todo n entero positivo, $n^2 + n + 1$ no tiene ningún divisor de la forma $3j + 2$, con $j \geq 0$.

Solución. Supongamos, para obtener una contradicción, que existen n natural, $k \geq 0$ y m natural tales que

$$n^2 + n + 1 = (3k + 2)m.$$

Multiplicando la igualdad anterior por $n-1$, nos queda

$$n^3 - 1 = (3k+2)m_1,$$

con m_1 un número natural. Sea p un primo que divide a $3k+2$, con $p = 3j+2$ para cierto $j \geq 0$. Tal p tiene que existir porque todos los divisores de $3k+2$ no pueden ser congruentes con 1 módulo 3. Observar que por la primera ecuación n no es múltiplo de p. Además,

$$n^3 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Por el teorema de Fermat

$$n^{p-1} = n^{3j+1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Combinando las dos últimas relaciones tenemos

$$1 \equiv n^{3j+1} = (n^3)^j n \equiv n \pmod{p}$$

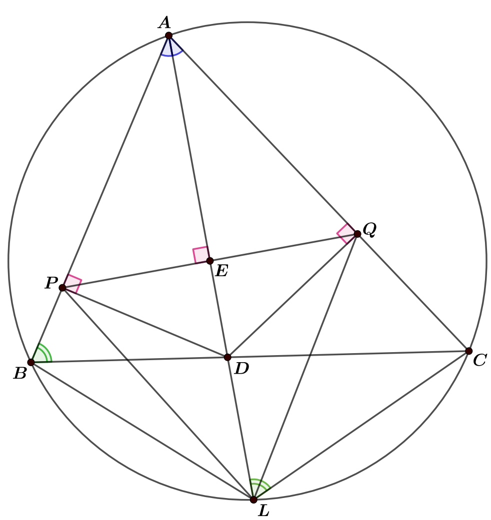
Pero según la primera relación y esta última

$$0 \equiv n^2 + n + 1 \equiv 3 \pmod{p}$$

De donde p divide a 3, que es imposible porque $p = 3j+2$.

94. Sea ABC un triángulo cuya bisectriz en A corta al lado BC en el punto D y a la circunferencia circunscrita en L. Sean P y Q los pies de las perpendiculares por D a los lados AB y AC, respectivamente. Probar que el área del cuadrilátero $APLQ$ es igual al área del triángulo ABC.

Solución.



Notar que el cuadrilátero $APDQ$ es cíclico de diámetro AD. Luego $\angle EPA = \angle QPA = \angle QDA$, donde E es el punto de intersección de los segmentos AD y PQ. Por tanto, $\triangle APE \sim \triangle ADQ$ (triángulos semejantes). En particular, $\angle AEP = \angle AQD = 90°$. Aplicando el teorema del seno (en su versión generalizada) a $\triangle APQ$ tenemos que $PQ = AD \cdot \operatorname{sen} \angle PAQ$. Luego

$$\text{área}(APLQ) = \frac{AL \cdot PQ}{2} = \frac{AL \cdot AD \cdot \operatorname{sen} \angle PAQ}{2}.$$

Como

$$\text{área}(\triangle ABC) = \frac{AB \cdot AC \cdot \operatorname{sen} \angle BAC}{2},$$

para demostrar el enunciado bastará probar que $AD \cdot AL = AB \cdot AC$, lo cual es cierto ya que $\triangle ABD \sim \triangle ALC$.

95. Cada carta de un grupo tiene escrito uno de los números $1, 2, \ldots, n$. Se conoce que la suma de todas es $k \cdot n!$ para cierto entero k. Demostrar que es posible apilarlas en k pilas de modo que la suma de los números en las cartas de cada una de las pilas sea igual a $n!$.

Solución. Comenzamos con un resultado previo.

Lema. *Del conjunto de n enteros $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se puede elegir uno o varios números cuya suma sea divisible por n.*

Demostración. Si alguno de los números es divisible por n, la conclusión es inmediata. En otro caso, ninguno de los n

$$b_1 = a_1,\ b_2 = a_1 + a_2, \ldots, b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

es divisible por n. Como son n números y $n-1$ restos posibles al dividir por n, dos de ellos, b_i, b_j, tienen el mismo resto, de donde $b_j - b_i = a_{i+1} + \ldots + a_j$ es divisible por n. $\square$

Regresamos ahora a la solución del problema y lo hacemos usando inducción en n. Si $n = 1$, la conclusión es obvia. Asumamos que la conclusión es cierta para un cierto valor de $n \geq 1$; es decir, que cuando tenemos cartas numeradas desde $1, \ldots, n$ y que suman $k \cdot n!$, entonces podemos apilarlas en k pilas de modo que cada una de ellas sumen $n!$.

Supongamos ahora que tenemos un grupo de cartas numeradas con valores desde 1 hasta $n+1$ que suman $k \cdot (n+1)!$.

Un grupo de cartas que sumen $\ell(n+1)$, con $\ell = 1, \ldots, n$ la llamaremos una *supercarta* y a ℓ lo llamamos *valor de la supercarta*. Con las cartas dadas formamos los siguientes valores de supercartas. Con las cartas cuyos valor es $n+1$, formamos grupos de una carta, y así tenemos valor 1 de supercarta. Con el resto de cartas de valores $1, \ldots, n$ consideramos un grupo de $n+1$ cartas, por el lema se tiene que existe un subconjunto de ellas que es múltiplo de $n+1$, la suma de éstas es $\leq n(n+1)$, y así tenemos otro valor de supercarta; este proceso de agrupar $n+1$ y seleccionar un subconjunto que sea múltiplo de $n+1$, y con él un valor de supercarta, lo repetimos hasta que queden menos de $n+1$ cartas. Como la suma de todos es un múltiplo de $n+1$, la suma de éstas también es múltiplo de $n+1$. De esa forma hemos construidos valores de supercarta en $1, \ldots, n$, cuya suma es $\frac{k \cdot (n+1)!}{n+1} = k \cdot n!$.