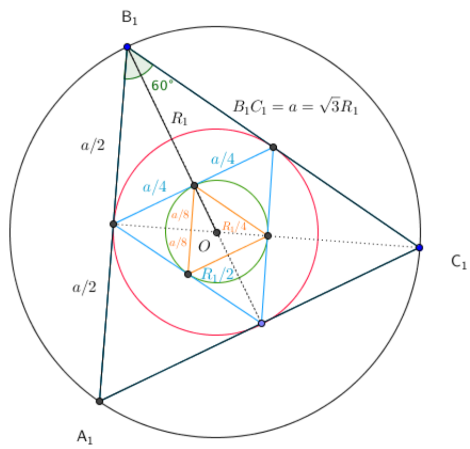
86. En un círculo de radio R inscribimos un triángulo equil'atero, en el triángulo un círculo y así sucesivamente. Calcula la suma de las áreas de la sucesión de círculos dibujados y la de las áreas de la sucesión de los triángulos.

Solución: Dibujamos nuestro primer círculo de centro O y radio R_1 en el que inscribimos el triángulo $A_1B_1C_1$.



Usando propiedades básicas de triángulos equiláteros (o razones trigonométricas) deducimos que $a = B_1C_1 = \sqrt{3}R_1$, el área del círculo es πR_1^2 y la altura y área del triángulo inscrito $T_1 = A_1B_1C_1$ son

$$h_{T_1} = \frac{3R_1}{2}, \quad A_{T_1} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R_1^2.$$

De este modo tenemos la siguiente sucesión de radios y áreas asociados a la construcción:

$(Circ_k, T_k)$	R_k	A_{C_k}	A_{T_k}
$(Circ_1, T_1)$	R_1	πR_1^2	$\frac{3\sqrt{3}}{4}R_1^2$
$(Circ_2, T_2)$	$R_1/2$	$\pi R_1^2/4$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}R_1^2/4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(Circ_n, T_n)$	$R_1/2^{n-1}$	$\pi R_1^2/2^{2(n-1)}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}R_1^2/2^{2(n-1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

La sucesión de áreas de ciírculos y triángulos son geométricas de razón $-1 < 1/4 < 1$, luego la suma de las infinitas áreas es:

$$\sum_{n\geq 1} A_{C_n} = \sum_{n\geq 1} \frac{\pi R_1^2}{2^{2(n-1)}} = \pi R_1^2 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4^{n-1}} = \pi R_1^2 \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4\pi R_1^2}{3},$$

$$\sum_{n\geq 1} A_{T_n} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R_1^2 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4^{n-1}} = \sqrt{3}R_1^2.$$

87. Calcula todos los posibles números primos p, q, r tales que $p + q^2 + r^3 = 200$.

Solución: Exceptuando el primo 2, el resto de los primos y sus potencias son impares y la suma de tres impares da un impar. Por tanto uno de los números primos de la terna y solamente uno, debe ser 2. Listamos los primeros números primos, sus cuadrados y sus cubos para acotar las ternas:

a	2	3	5	7	11	13
a^2	4	9	49	121	169	289
a^3	8	27	125	343		

Desde la tabla obtenemos las siguientes posibilidades (siempre uno de los primos ha de ser 2):

- $r = 2, 3, 5$.
- $q = 2, 3, 5, 7, 11, 13$.
- $p = 200 - q^2 - r^3$.

Para $r = 2$ y $p = 192 - q^2$ primo obtenemos las ternas $(p, q, r) = (167, 5, 2), (71, 11, 2)$ y $(23, 13, 2)$. Para $q = 2$ y $p = 196 - r^3$ primo obtenemos la terna $(p, q, r) = (71, 2, 5)$. Para $r = 2$ y $q^2 = 198 - r^3$ no hay ternas válidas.

88. En el plano dibujamos varios puntos distintos y trazamos todos los segmentos determinados por los puntos dibujados. Si una recta r no pasa por ninguno de los puntos dibujados y corta a exactamente 60 de los segmentos que hemos trazado. ¿Cuántos puntos hemos dibujado? ?Cuántos segmentos no son cortados por r? Dar todas las posibilidades.

Solución: Los N puntos aparecen distribuídos entre los dos semiplanos en que la recta r divide al plano, luego $N = P + Q$con P y Q el número de puntos en cada semiplano. Cada par de puntos determina un único segmento y los segmentos cortados por la recta r son los que unen un punto de cada semiplano (un total de $\frac{N(N-1)}{2}$), por tanto, $P \cdot Q = 60$. Por tanto, el problema equivale a encontrar las posibles descomposiciones de $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ en producto de dos números. Las posibilidades son:

(P, Q)	$(1, 60)$	$(2, 30)$	$(3, 20)$	$(5, 12)$	$(4, 15)$	$(6, 10)$
N	61	32	23	17	19	16
$\frac{N(N-1)}{2} - 60$	1770	436	1933	76	111	60

89. Halla todas las ternas de reales positivos (x, y, z) que cumplan el sistema formado pos las siguientes tres ecuaciones:

$$2x\sqrt{(x+1)} - y(y+1) = 1, \quad 2y\sqrt{(y+1)} - z(z+1) = 1, \quad 2z\sqrt{(z+1)} - x(x+1) = 1.$$

Solución: Por un lado, la simetría de las ecuaciones nos permite suponer que $0 \le x \le y \le z$. Por otro, las expresiones las podemos relacionar con las desigualdad de las medias aritmética y geométrica en la forma siguiente ($a > 0$, $n = 2$ y $x_1 = a^2, x_2 = a + 1$):

$$2a\sqrt{a+1} = 2\sqrt{a^2(a+1)} \le a^2 + a + 1,$$

y la igualda se da si y solamente si $a^2 = a + 1$ si y solamente si $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Si existen soluciones con los valores de las variables distintos, llegamos a:

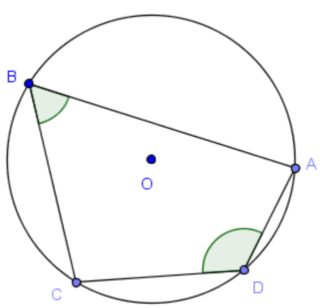
$$2x\sqrt{x+1} = y^2 + y + 1 < 2y\sqrt{y+1} = z^2 + z + 1 < 2z\sqrt{z+1},$$

que no es imposible por la desigualdad de las medias. Así pues, en las soluciones al menos dos variables coinciden. Si $x = y$, de las ecuaciones dadas obtenemos las igualdades de las medias aritmética y geométrica para $a = x = y$ y para $a = z$, por tanto $x = y = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ y $z = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Y, como $1 + x(x+1) = 1 + z(z+1)$, llegamos a que $x = z$. Lo mismo se concluye si suponemos que $y = z$ ó $x = z$.

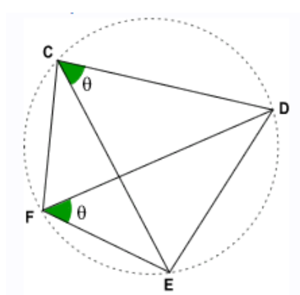
90. Sea ABC un triángulo acutángulo, con N, P, Q los pies de las alturas sobre Los lados BC, CA y AB respectivamente. Si R y S son las proyecciones de N sobre los lados AB y AC y T y U las proyecciones de N sobre BP y CQ, prueba que los puntos R, S, T y U están alineados.

Solución: Para ello usaremos cuadriláteros cíclicos. Para C cuadriláteto convexo son equivalentes:

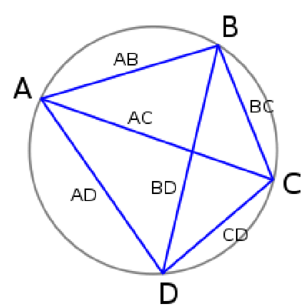
- C es cíclico, esto es, se puede inscribir en una circunferencia (figura (a)).
- Los ángulos opuestos de C son suplementarios.
- El ángulo entre un lado y la diagonal es igual al ángulo que forman el lado opuesto y la otra diagonal (figura (b)).
- Teorema de Ptolomeno: la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de sus diagonales ($\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$) (figura (c)).



(a)



(b)



(c)

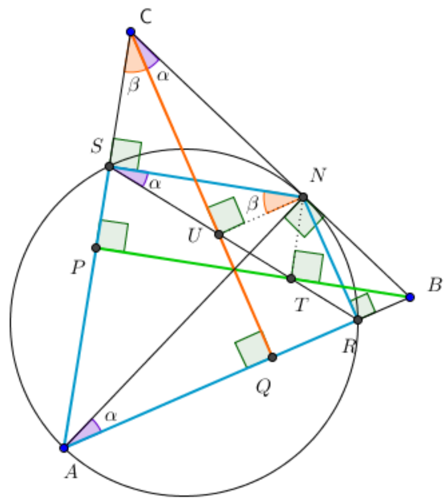
La figura siguiente corresponde al enunciado. Probaremos que S, U, R están alineados y que S, T, R también lo están, por tanto los cuatro puntos lo estarán. En la figura observamos que:

- El cuadriláteto $NSAR$ es cíclico (ángulos opuestos suplementarios). Por tanto,

  $$\measuredangle NSR = \alpha = \measuredangle NAR$$

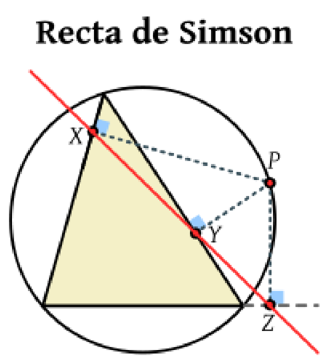
  de donde las rectas SR y SN forman un ángulo de amplitud α.
- Los triángulos NAB y QCB son semejantes, luego $\measuredangle NAB = \measuredangle NAR = \alpha = \measuredangle QCB$.
- $\measuredangle SCQ = \beta = \measuredangle SNU$, luego el cuadrilátero $SCNU$ es cíclico (ángulos entre lados y diagonales), luego $\measuredangle NSU = \alpha$, luego las rectas SU y SN forman un ángulo de amplitud α.

De lo anterior concluídos que S, U y Restán alineados. De forma análoga se procede con S, T y R.



Solución Rodolfo Larrea. El resultado se sigue por doble aplicación directa de el Teorema de Wallace-Simson (se pueden encontrar demostraciones simples de este resultado).

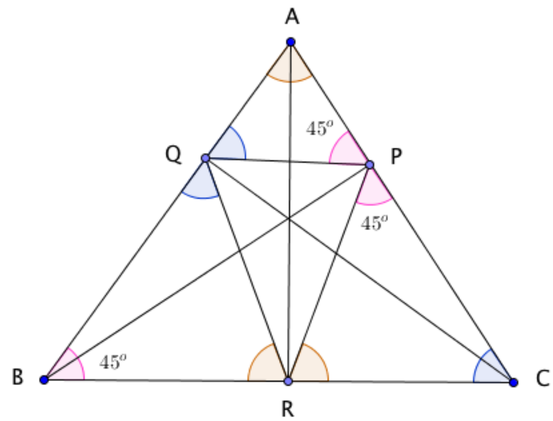
> *Teorema de Wallace-Simson.* Si desde un punto P se trazan perpendiculares a los lados de un triánngulo o a sus prolongaciones, los respectivos pies de las perpendiculares serán colineales si y sólo si el punto P pertenece a la circunferencia circunscrita del triángulo.



91. Encuentra los dos ángulos restantes de un triángulo acutángulo del que conoces un ángulo de 45 grados sexagesimales, sabiendo que el producto de dos de los ángulos de su triángulo órtico, medidos en grados sexagesimales, es 2016.

(Ayuda: el triángulo órtico de un triángulo T es aquel que tiene por vértices los pies de las alturas de T. Observa que el triángulo órtico divide a T en tres triángulos semejantes a T.)

Solución: Dibujamos nuestro triángulo ABC y, sobre él, su triángulo órtico PQR que divide al trińulo inicial en 4 triángulos. Es facil probar que los tres exteriores son semejantes al inicial: $ABC \backsim APQ \backsim RBQ \backsim RPC$.



Supongamos que $\measuredangle ABC = 45^o$, que $\measuredangle PQR = a^o$ y que $\measuredangle QRP = b^o$. Tenemos que $a+b = 90$ y que $a \cdot b = 2016$. Por tanto a y b son soluciones de la ecuación $x^2 - 90x + 2016 = (x-48)(x-42)$, luego $a = 48$ y $b = 42$ ó al revés.