Seminario de problemas. Curso 2023-24. Hoja 13

130. Sea $f(x)$ una función y $f^{-1}(x)$ su inversa. Obtener el valor de m si

$$\begin{cases} f(x) = m2^x + 3^x, \\ f^{-1}(15) = f^{-1}(6) + 1. \end{cases}$$

<u>SOLUCIÓN:</u> Denotamos $a = f^{-1}(6)$ y $b = f^{-1}(15)$. De este modo, tenemos que

$$6 = f(a) = m2^a + 3^a \quad \text{y} \quad 15 = f(b) = f(a+1) = m2^{a+1} + 3^{a+1}$$

Multiplicando la primera por 3 y restando la segunda obtenemos $m2^a = 3$ que sustituido en la primera da $3^a = 3$, de donde $a = 1$. Entonces $m = 3/2$.

131. Sea $p(x)$ un polinomio de tercer grado con coeficientes enteros positivos menores que 10, de modo que se cumple la identidad $p(\sqrt{10}) = 35 + 25\sqrt{10}$. Calcular el valor de $p(1)$.

<u>SOLUCIÓN:</u> Suponemos que $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde a, b, c y d son números enteros menores que 10. Si evaluamos en $x = \sqrt{10}$ obtenemos

$$p(\sqrt{10}) = 10b + d + (10a + c)\sqrt{10};$$

como debe ser igual a $35 + 25\sqrt{10}$, llegamos al sistema

$$\begin{cases} 10b + d = 35, \\ 10a + c = 25, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} d = 35 - 10b, \\ c = 25 - 10a. \end{cases}$$

Debido a las restricciones impuestas sobre los números d y c, tenemos las desigualdades $0 < 35 - 10b < 10$ y $0 < 25 - 10a < 10$, cuya única solución en los enteros es, respectivamente, $b = 3$ y $a = 2$. De este modo, $d = 5$ y $c = 2$ y, así,

$$p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 5.$$

Por tanto, $p(1) = 15$.

132. Sea n un numero natural y x un número real. Calcula el resto de dividir

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k \quad \text{entre} \quad \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

<u>SOLUCIÓN:</u> Dado que al realizar la división de dos polinomios el grado del polinomio resto es menor que el grado del polinomio divisor, en nuestro caso, como el grado del divisor es 1, el resto es una constante. De este modo,

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) q(x) + r,$$

donde $q(x)$ es un polinomio y r una constante. La identidad anterior se cumple para cualquier x, aunque el valor de cada elemento de ella pueda ser distinto; sin embargo, precisamente el hecho de que r sea constante nos indica que su valor es independiente del valor de x. Por tanto, podemos tomar $x = 1$, de donde obtenemos

$$\sum_{k=0}^{n} k = r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solución alternativa: El resto de la división de un polinomio $p(x)$ entre $x - a$, que como sabemos por el teorema del resto es igual a $p(a)$, es el mismo que el resto de la división de $p(x)$ entre $(x - a)/b$; en efecto,

$$p(x) = (x - a)q(x) + r \quad \Rightarrow \quad p(x) = \frac{x - a}{b} bq(x) + r.$$

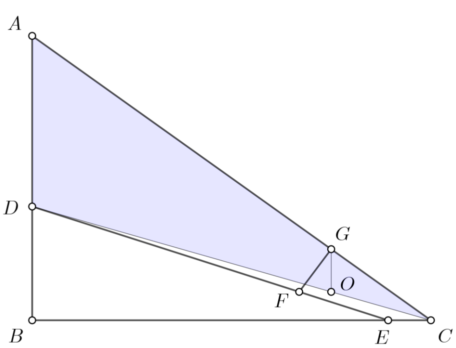
Como $x\sqrt{2} - \sqrt{2}/2 = (x - 1)/\sqrt{2}$, el resto de dividir $p(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^k$ entre $x\sqrt{2} - \sqrt{2}/2$ es el mismo que le resto de dividir $p(x)$ entre $x - 1$, que es

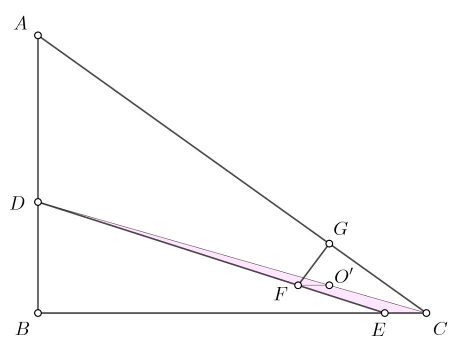
$$p(1) = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

133. Sea un triángulo rectángulo ABC, recto en B. Sobre el lado AB se sitúa el punto D, de forma que $AD = 4$; análogamente, sobre el lado BC se sitúa el punto E, de forma que $EC = 1$. Sobre los segmentos DE y AC se sitúan, respectivamente, los puntos F y G de modo que

$$\frac{DE}{EF} = \frac{AC}{CG} = 4.$$

Obtener la longitud del segmento FG.





<u>SOLUCIÓN:</u> En primer lugar trazamos el segmento DC. La recta paralela al lado AB y que pasa por el punto G corta al segmento DC en el punto O. Por el teorema de Thales,

$$\frac{GO}{AD} = \frac{GC}{AC} \quad \Rightarrow \quad GO = \frac{4GC}{AC} = \frac{4GC}{4CG} = 1,$$

donde hemos usado que $AC = 4CG$. Por otra parte, la recta paralela al lado BC y que pasa por el punto F corta al segmento DC en el punto O'. De nuevo, por Thales,

$$\frac{FO'}{EC} = \frac{DF}{DE} \quad \Rightarrow \quad FO' = \frac{DE - FE}{4FE} = \frac{3FE}{4FE} = \frac{3}{4},$$

donde esta vez hemos usado que $EC = 1$, $DE = 4FE$ y $DF = 3FE$.

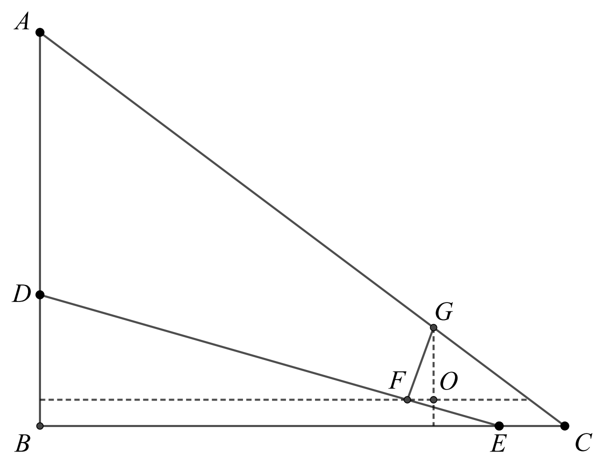
Veamos que el punto O coincide con O'. Para ello, observamos por Thales que

$$\frac{DC}{AD} = \frac{OC}{GO} \quad \Rightarrow \quad DC = 4OC,$$

luego O se caracteriza por ser el punto del segmento DC que cumple la relación $DC = 4OC$. Sin embargo,

$$\frac{DC}{EC} = \frac{DO'}{FO'} \quad \Rightarrow \quad DC = \frac{4}{3}DO' = \frac{4}{3}(DC - O'C) \quad \Rightarrow \quad DC = 4O'C,$$

es decir, O' también se caracteriza por ser el punto del segmento DC que cumple la relación $DC = 4O'C$; por lo tanto, ambos puntos O y O' son el mismo.



De este modo, los segmentos FG, GO y OF forman un triángulo rectángulo en O. Así que

$$FG^2 = GO^2 + OF^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

y, por consiguiente, $FG = 5/4$.

134. Para un número entero positivo n, se define su factorial $n!$ como $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$.

- Obtener el mayor n posible de forma que $n! + 1$ sea divisible entre 25.
- Probar que si 3 divide a $x + 2y$, entonces también divide a $y + 2x$.

Solución:

- El hecho de que $n!+1$ sea divisible entre 25 es que $n!+1 \equiv 0 \pmod{25}$ o, lo que es lo mismo, $n! \equiv 24 \pmod{25}$. Dado que $4! = 24$, tenemos que $n = 4$ es una solución; veamos que es la única.

  Supongamos que $n \geq 5$ y que $n! \equiv -1 \pmod{25}$. Tendríamos entonces

  $$-1 \equiv n! = n \cdots 5 \cdot 24 \equiv -n \cdots 5 \pmod{25},$$

  luego $n \cdots 5 quiv 1 \pmod{25}$; esto es, existiría un $m \geq 0$ natural tal que

  $$n \cdots 5 = 25m + 1.$$

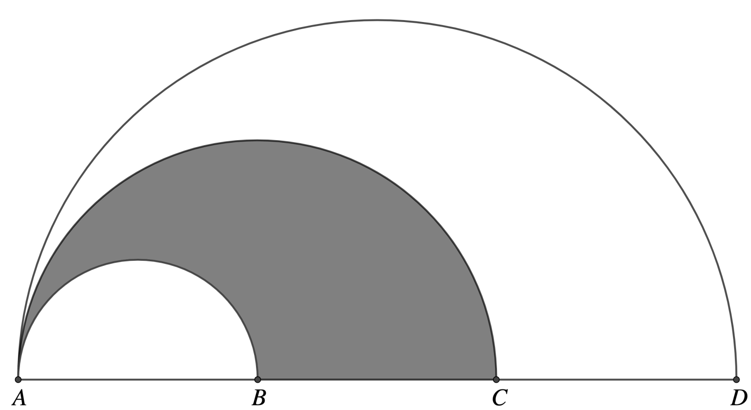
  Si suponemos que, además, $n \geq 10$, entonces al dividir ambos lados de la igualdad anterior entre 25 tendríamos que

  $$n \cdots 11 \cdot 2 \cdot 9 \cdots 6 = m + 1/5,$$

  pero aquí el lado izquierdo de la igualdad es un número natural mientras que el lado derecho es un no natural, absurdo; por tanto, $5 \leq n \leq 9$. Por inspección directa se prueba que estos cinco casos tampoco son posibles. Por consiguiente $n = 4$.

- Si 3 divide a $x+2y$, entonces $x+2y \equiv 0 \pmod{3}$ o, de manera equivalente, $x+3y \equiv y \pmod{3}$. Por otra parte, es claro que $3y \equiv 0 \pmod{3}$, luego $x+3y \equiv x \pmod{3}$. De este modo $x \equiv y \pmod{3}$ y, por tanto, $2x+y \equiv x+2y \pmod{3}$. Esto implica que $2x+y \equiv 0 \pmod{3}$.

135. Sea una semicircunferencia de diámetro $AD = d$, y dividamos dicho diámetro en los tres segmentos iguales AB, BC y CD. Interiormente a la semicircunferencia inicial, se trazan las semicircunferencias de diámetros AB y AC. Obtener el área encerrada entre estas dos últimas semicircunferencias.



Solución: El área del semicírculo de radio BC es $\pi BC^2/2$, mientras la del semicírculo de diámetro AB es $\pi AB^2/8$. De este modo, el área de la región sombreada es

$$\frac{\pi}{2}BC^2 - \frac{\pi}{8}AB^2 = \frac{\pi}{2}\left(AB^2 - \frac{AB^2}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}AB^2 = \frac{3\pi}{8}\left(\frac{d}{3}\right)^2 = \frac{\pi}{24}d^2.$$

136. En la siguiente multiplicación, cada letra representa un dígito distinto para cada letra:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & J & E & E & P \\ \times & & & J & E & E & P \\ \hline B & E & E & B & E & E & P \end{array}$$

Obtener todos los posibles valores de JEEP.

<u>SOLUCIÓN:</u> Dado que cada letra representa un dígito distinto, es claro que

$$JEEP = J10^3 + E10^2 + E10 + P$$

y

$$BEEBEEP = B10^6 + E10^5 + E10^4 + B10^3 + E10^2 + E10 + P$$

donde se cumple que J, E, P, B son números naturales entre 0 y 9. De este modo

$$(JEEP)^2 = J^2 10^6 + 2JE10^5 + E(E+2J)10^4 + 2(JP+E^2)10^3 + E(E+P)10^2 + 2EP10 + P^2,$$

e igualando esto al desarrollo de $BEEBEEP$ obtenemos un sistema de siete ecuaciones con cuatro incógnitas

$$\begin{cases} B = J^2, & \text{(I)} \\ E = 2JE, & \text{(II)} \\ E = E(E+2J), & \text{(III)} \\ B = 2(JP+E^2), & \text{(IV)} \\ E = E(E+P) & \text{(V)} \\ E = 2EP & \text{(VI)} \\ P = P^2. & \text{(VII)} \end{cases}$$

De (II) y (III) se obtiene que necesariamente $E = 0$. Así, nuestro sistema se ha reducido a

$$\begin{cases} B = J^2, & \text{(i)} \\ B = 2JP, & \text{(ii)} \\ P = P^2. & \text{(iii)} \end{cases}$$

De (iii) obtenemos que P únicamente puede tomar los valores $P = 0$ o $P = 1$.

Supongamos que $P = 0$, entonces de (ii) tenemos que $B = 0$ y de (i) que $J = 0$; luego $BEEP = 0000$.

Si por el contrario $P = 1$, entonces de (i) y (ii) tenemos que $J^2 = 2J$, por lo que o bien $J = 0$ o $J = 2$. Si $J = 0$, entonces de (i) obtenemos $B = 0$; así $BEEP = 0001$. Si $J = 2$, entonces $B = 4$, $JEEP = 2001$ y $BEEBEEP = 4004001$.