Seminario de problemas Curso 2022-23. Hoja 13

110. En una pizarra están escritos los números del 1 al 100. Se eligen dos cualesquiera de ellos, se borran y se escribe la suma de ambos en la pizarra. Si repetimos este proceso hasta que solo quede un número en la pizarra, ¿se puede saber qué número es el que queda escrito?

Solución.

Observemos que al borrar los dos números y sustituirlos por la suma de ambos, la suma de todos los números que están escritos en la pizarra no ha cambiado. Por lo tanto, el número final que quede debe ser igual a la suma de todos ellos. Es decir

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 = 5050.$$

111. Una bolsa contiene 99 bolas rojas y 99 bolas azules. Se sacan dos bolas de la bolsa y:

- Si las bolas son del mismo color, da igual si son rojas o azules, se introduce una bola roja en la bolsa.
- Si las bolas son de diferente color, se introduce una bola azul en la bolsa.

Notar que después de esto, la bolsa contiene una bola menos. Si se repite el proceso hasta que solo quede una bola, ¿se puede saber de qué color es esa bola?

Solución.

Veamos cómo cambia el número de bolas de cada color después de cada paso. Si las dos bolas que se sacan son rojas, o ambas son de distinto color, las bolas rojas disminuirán en una y no habrá cambio en el número de azules. Si las dos bolas que se sacan son azules, las rojas aumenta en una y las azules disminuyen en 2. En cualquier caso, el número de bolas azules o permanece igual o disminuye en dos unidades, por lo que no cambia la paridad del número de éstas. Como al principio hay 99 bolas azules, su número debe permanecer impar hasta el final. Es decir, la última bola necesariamente tiene que ser azul.

112. Si las ecuaciones $x^2 + ax - 4 = 0$ y $x^2 - 4x + a = 0$ tienen exactamente una solución en común, ¿cuál es el valor del parámetro a?

Solución.

Sea x_0 la raíz común de ambas ecuaciones. Entonces, $x_0^2 + ax_0 - 4 = 0$, $x_0^2 - 4x_0 + a = 0$, por lo que

$$x_0^2 + ax_0 - 4 = x_0^2 - 4x_0 + a\,, \longrightarrow\ ax_0 - 4 = -4x_0 + a\ \longrightarrow (a+4)x_0 = a + 4\ \longrightarrow x_0 = 1,$$

siempre que $a_0 + 4 \neq 0$. Ahora bien, si $a_0 = -4$, las dos ecuaciones son la misma y tendrán las mismas soluciones y no solo una en común. Como $x_0 = 1$ es solución de las ecuaciones, sustituyendo se tiene

$$1 + a - 4 = 0,$$

por lo que $a = 3$. Puede verse con facilidad que, entonces, las raíces de la primera ecuación son 1 y -4 y las de la segunda ecuación 1 y 3.

113. Probar que, si $p > 3$ es primo, entonces $p^2 - 1$ es múltiplo de 24.

Solución.

Si nos fijamos en los primos mayores que 3, como 5, 7, 11, 13, 17, 19, ..., observamos que todos ellos anteceden o preceden a un múltiplo de 6. Para ver que esto es cierto en general, consideremos un número primo p mayor que 3. Por ser primo, debe de ser un número impar, por lo que el anterior, $p-1$, y el posterior, $p+1$, son pares. Ahora bien, de la terna de números consecutivos $p-1$, p, $p+1$ uno de ellos debe ser múltiplo de 3. Pero p, al ser primo y mayor que 3, no lo es, con lo que o bien $p-1$ o bien $p+1$ es múltiplo de 3. Al ser pares, uno de ellos es múltiplo de 6.

A partir de este resultado es fácil demostrar lo que nos piden. En efecto, si p es un múltiplo de 6 más 1, entonces se puede escribir como $p = 6k + 1$, siendo k un número natural. De esta forma

$$p^2 - 1 = (6k+1)^2 - 1 = (36k^2 + 12k + 1) - 1 = 36k^2 + 12k = 12k(3k+1).$$

Con esto vemos que es múltiplo de 12, pero como k y $3k+1$ tienen distinta paridad, uno de ellos es múltiplo de 2, por lo que $p^2 - 1$ es múltiplo de 24. De la misma manera se llega al resultado en el caso en que $p = 6k - 1$.

114. En una cuadrícula 3×3 se escribe en cada una de las casillas uno de los números -1, 0, 1. Probar que, entre las sumas por filas o columnas, hay al menos dos iguales.

Solución.

Observemos que, una vez escritos los números, da igual cómo lo hagamos, las posibles sumas de tres de ellos que se pueden obtener son siete: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Sean F_1, F_2, F_3 las sumas de los números en la primera, segunda y tercera fila, respectivamente y C_1, C_2 y C_3 la suma de los números por columnas.

$$\begin{array}{|c|c|c|l} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & F_1 \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & F_2 \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & F_3 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{C_1} & \multicolumn{1}{c}{C_2} & \multicolumn{1}{c}{C_3} & \end{array}$$

Se tiene que

$$F_1 + F_2 + F_3 + C_1 + C_2 + C_3 = 2(a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{31} + a_{32} + a_{33}),$$

que es un número par. Si las 6 sumas por filas y columnas fueran todas distintas, de las 7 posibles sumas, la que no aparecería sería una de las sumas pares. Eso quiere decir que, en este caso, tendrían que aparecer las 4 sumas impares. En concreto, tiene que estar la suma 3. Sin pérdida de generalidad, supondremos que es F_1 la que vale 3. Entonces nuestro tablero queda como

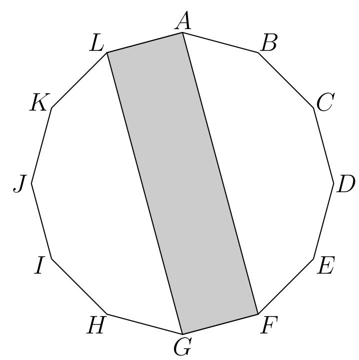
1	1	1
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

De aquí deducimos que es imposible obtener la suma -3 por columnas, luego esta suma debe aparecer por filas, quedando nuestro tablero de la siguiente manera

1	1	1
-1	-1	-1
a_{31}	a_{32}	a_{33}

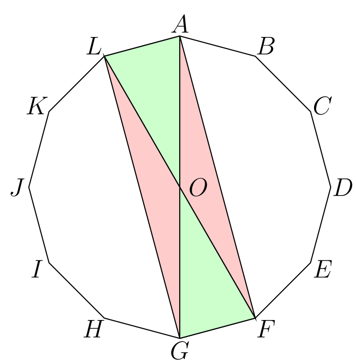
Si queremos que las sumas por columnas sean todas diferentes, en la última fila debemos escribir los números 0, 1 y -1. Pero, entonces, la suma 0 se obtiene en una de las columnas y en la última fila. Por tanto, no puede ser que las 6 sumas sean diferentes y hay al menos dos sumas iguales.

115. Consideramos un dodecágono regular $ABCDEFGHIJKL$. El cociente entre el área del rectángulo $AFGL$ y el área del dodecágono se puede escribir como una fracción irreducible de la forma $\frac{m}{n}$, con m y n números naturales. ¿Cuánto vale $m+n$?



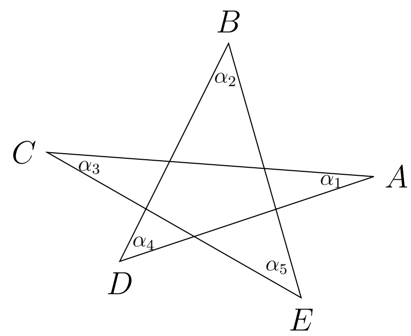
Solución.

Sea S el área del dodecágono y descompongamos el cuadrado $AFGL$ en cuatro triángulos, como se ve en la siguiente figura.



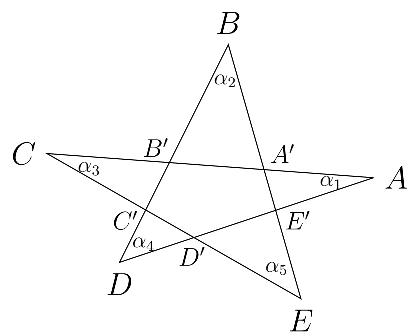
Es evidente que el área triángulo OFG es la doceava parte de la del dodecágono, $\frac{1}{12}S$. Lo mismo se puede decir del triángulo OAL. Ahora bien, como $AFGL$ es un rectángulo, los triángulos verdes y rojos tienen la misma área, es decir los triángulos OGL y OAF también tienen un área igual a $\frac{1}{12}S$. Por tanto, el área del cuadrado $AFGL$ es $\frac{4}{12}S = \frac{1}{3}S$, con lo que $m = 1$, $n = 3$ y $m + n = 4$.

116. En una estrella de 5 puntas, ¿cuánto vale la suma de los ángulos α_1, α_2, α_3, α_4 y α_5?



Solución.

Sean A', B', C', D', E' los puntos de intersección de los segmentos que unen los vértices A, B, C, D, E.



Los ángulos $\angle AA'E'$ y $\angle BA'B'$ son iguales al ser opuestos por el vértice. De manera análoga tenemos las igualdades

$$\angle BB'A' = \angle CB'C', \quad \angle CC'B' = DC'D', \quad \angle DD'C' = \angle ED'E', \quad \angle EE'D' = \angle AE'A'.$$

Si llamamos a estos 5 ángulos β_1, β_2, β_3, β_4, β_5, sumando los ángulos de los cinco triánguos que forman las puntas, resulta

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5) = 5 \cdot 180 = 900. \qquad (1)$$

Por otra parte, los cinco ángulos interiores del pentágono $A'B'C'D'E'$ son $180 - \beta_j$, con $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Ahora bien, la suma de los ángulos interiores de un polígono de N lados es igual a $180(N-2)$, por lo que

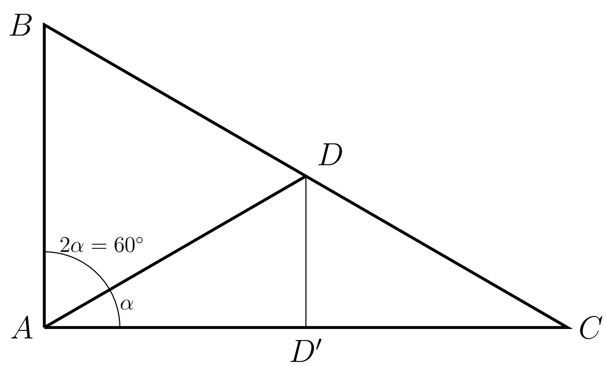
$$5 \cdot 180 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5) = 3 \cdot 180 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = 360. \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta (1) y (2), se tiene $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 180$.

117. En un triángulo ΔABC, desde el vértice A se traza una recta que forma con el lado AC un ángulo que es igual a la tercera parte de ángulo $\angle BAC$. Esta recta corrta al lado BC en un punto D. Si el triángulo ΔABD es equilátero y tiene área 1, ¿cuál es el área del triángulo ΔABC?

Solución.

Si hacemos un dibujo con los datos del problema, el ángulo $\angle BAD$ es de $60°$, al ser ABD un triángulo equilátero. Por otra parte, este ángulo es el doble que el ángulo $\angle DAC$, por lo que el ángulo $\angle BAC$ es recto y ABC un triángulo rectángulo. A su vez, $\angle ABC = 60°$ y $\angle ACB = 30° = \angle CAD$.



Si trazamos por D la altura del triángulo ADC, ésta lo divide en dos triángulos rectángulos iguales, pues sus otros ángulos son $60°$ y $30°$ respectivamente. Así, cada uno de ellos es la mitad de un triángulo equilátero de lado AB. Por tanto, el área de ABC es dos veces el área de ABD, es decir 2.