

103. Las 10 parejas de números (una por cada línea)

29	31
105 29	105 31
141 105 29	141 105 31
237 141 105 29	237 141 105 31
453 237 141 105 29	453 237 141 105 31
132 453 237 141 105 29	132 453 237 141 105 31
504 132 453 237 141 105 29	504 132 453 237 141 105 31
162 504 132 453 237 141 105 29	162 504 132 453 237 141 105 31
813 162 504 132 453 237 141 105 29	813 162 504 132 453 237 141 105 31
411 813 162 504 132 453 237 141 105 29	411 813 162 504 132 453 237 141 105 31

son primos gemelos. Nótese que los trozos 105, 141, ... que se van añadiendo siempre son múltiplos de 3. ¿Es obligatorio hacerlo así para obtener primos gemelos?

Solución.

Escribamos una pareja de esos números en la forma $100x + 29$ y $100x + 31$, y vamos a probar que x tiene que ser múltiplo de 3.

Supongamos que x no fuera múltiplo de 3; entonces, o bien $x \equiv 1 \pmod{3}$, o bien $x \equiv 2 \pmod{3}$. Distingamos estos dos casos:

- Si $x \equiv 1 \pmod{3}$, entonces $100x + 29 \equiv x + 2 \equiv 1 + 2 \equiv 0 \pmod{3}$, lo cual no puede ser ya que $100x + 29$ es primo.
- Si $x \equiv 2 \pmod{3}$, entonces $100x + 31 \equiv x + 1 \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, lo cual no puede ser ya que $100x + 31$ es primo.

En ambos casos hemos llegado a un absurdo y, por tanto, x tiene que ser múltiplo de 3.

A partir de ahí, podemos hacer inducción sobre el número de “trozos” de longitud tres que vamos añadiendo, que los denotamos $x_1, x_2, \dots$ (empezando por la derecha, es decir, en el ejemplo, $x_1 = 105$, $x_2 = 141$, etc.). Para el primer trozo, el x_1 de tres cifras tiene que ser múltiplo de 3. Supongamos que hemos probado que $x_1, \dots, x_{k-1}$ son múltiplos de 3, y vamos a ver que también x_k es múltiplo de 3.

Por lo que hemos visto antes, el número $x = x_k x_{k-1} \dots x_1$ (indica concatenación de dígitos, no producto) es múltiplo de 3. Por hipótesis de inducción, $y = x_{k-1} \dots x_1$ (de nuevo indica concatenación de dígitos) es múltiplo de 3. Así pues tenemos que $x = 10^{3(k-1)} \cdot x_k + y$ es múltiplo de 3, con y múltiplo de 3. Despejando, $10^{3(k-1)} \cdot x_k = x - y$, que será divisible por 3. Y, como $\text{mcd}(10^{3(k-1)}, 3) = 1$, forzosamente 3 divide a x_k .

104. Prueba que cada $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1/4, 2/4, 3/4, 1\}$, $0 \leq r \leq 1$, se puede escribir como

$$r = \frac{m^2}{4nM}$$

con las condiciones $n, m, M \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y $\text{mcd}(n, m) = 1$.

Solución.

Esto es verdad porque, dado $r = p/q$, con p y q primos entre sí y q que no divide a 4, solo hay dos posibilidades:

- si q tiene un divisor impar n , digamos $q = nM'$, podemos escribir $r = (2p)^2/(4nM)$ (con $M = pM'$);
- si q es una potencia de 2, entonces $q = 2^j$ con $j \geq 3$, p es impar y tenemos $r = p^2/(4 \cdot 2^{j-2}p)$ (con $n = 2^{j-2} \geq 2$).

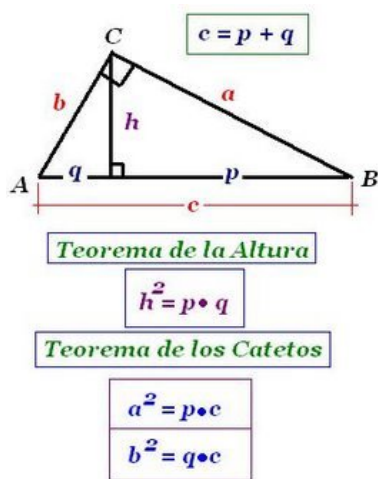
En ambos casos hemos encontrado una descomposición de la forma $r = \frac{m^2}{4nM}$.

- 105.** La hipotenusa de un triángulo rectángulo (en un examen estándar americano) mide 10 pulgadas, la altura proyectada sobre ella mide 6 pulgadas. Calcular el área del triángulo. Los estudiantes americanos se habían enfrentado a este problema durante décadas, pero llegaron estudiantes rusos, de Moscú, y ninguno de ellos fue capaz de encontrar la respuesta como lo hacían sus compañeros americanos (quienes daban como respuesta 30 pulgadas cuadradas). ¿Por qué?

Solución.

Sin pensar demasiado, la respuesta obvia es que el área del triángulo es $\frac{10 \cdot 6}{2} = 30$ pulgadas cuadradas.

Lo que ocurre es que no existe ningún triángulo como el del enunciado del problema. Para verlo, apoyémonos en teorema de la altura, con la notación del dibujo adjunto:



En nuestro triángulo tendríamos $c = 10$, $h = 6$ y $p = 10 - q$. Entonces, el teorema de la altura nos dice que $6^2 = (10 - q)q$, o sea $q^2 - 10q + 36 = 0$, que no tiene raíces reales (para que el discriminante de la ecuación no sea negativo y tal triángulo pueda existir, la altura debe ser $h \leq 5$).

- 106.** La distancia entre las ciudades A y B es de 40 km. Dos ciclistas salen respectivamente de A y de B a la vez, dirigiéndose el uno hacia el otro, uno con velocidad de 10 km/h y el otro con velocidad de 15 km/h. Una mosca sale desde el primer ciclista cuando está en A volando a una velocidad de 100 km/h, toca la frente del segundo, vuelve a volar hasta la frente del primero, regresa hasta la del segundo, y continúa así hasta que las frentes de

los ciclistas se chocan y aplastan a la mosca. ¿Cuántos kilómetros ha volado en total la mosca?

Solución.

La mosca ha estado volando a 100 km/h el tiempo que han tardado los ciclistas en encontrarse.

Como un ciclista va a 10 km/h y el otro a 15 km/h, se están juntando a 25 km/h. Dado que la separación inicial son 40 km, aplicando la definición $v = s/t$ obtenemos que el tiempo que tardan en juntarse es $t = \frac{40}{25} = \frac{8}{5}$ horas.

A 100 km/h, durante ese tiempo la mosca habrá volado $\frac{8}{5} \cdot 100 = 160$ km.

107. Calcular la siguiente suma:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100}.$$

Solución.

Observemos que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

lo cual va a permitir cancelar sumandos (este tipo de sumas se denominan telescópicas). Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} \\ = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}. \end{aligned}$$

108. Los números de Fibonacci forman la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..., en la que $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ para cada $n = 1, 2, \dots$ (a_n es el enésimo término de la sucesión). Encontrar el máximo común divisor de los números a_{100} y a_{99} .

Solución.

Al aplicar el algoritmo de Euclides para la calcular el máximo común divisor de a_{n+2} y a_{n+1} , queda

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} \cdot 1 + a_n, & \text{luego } \text{mcd}(a_{n+2}, a_{n+1}) &= \text{mcd}(a_{n+1}, a_n), \\ a_{n+1} &= a_n \cdot 1 + a_{n-1}, & \text{luego } \text{mcd}(a_{n+1}, a_n) &= \text{mcd}(a_n, a_{n-1}), \end{aligned}$$

etc., hasta llegar a

$$a_3 = a_2 \cdot 1 + a_1, \quad \text{luego } \text{mcd}(a_3, a_2) = \text{mcd}(a_2, a_1) = 1.$$

En consecuencia, $\text{mcd}(a_{n+2}, a_{n+1}) = 1$ siempre.

De hecho, ¡con los números de Fibonacci es como más lento discurre el algoritmo de Euclides para la calcular el mcd!

109. En un torneo participan n equipos, los que pierden abandonan la competición, y el ganador se decide tras $n - 1$ encuentros. El cuadro del torneo se puede escribir de forma simbólica como, por ejemplo, $((a, (b, c)), d)$ que significa que b juega contra c , y el ganador se cruza con a , y el ganador de éstos con d .

- Para 2 equipos, sólo puede ser (a, b) , luego un solo cuadro.
- Para 3 equipos, sólo puede ser $((a, b), c)$, o $((a, c), b)$, o $((b, c), a)$, luego hay 3 posibles cuadros.
- Para 4 equipos:

$$\begin{array}{cccc} (((a, b), c), d) & (((a, c), b), d) & (((a, d), b), c) & (((b, c), a), d) \\ (((b, d), a), c) & (((c, d), a), b) & (((a, b), d), c) & (((a, c), d), b) \\ (((a, d), c), b) & (((b, c), d), a) & (((b, d), c), a) & (((c, d), b), a) \\ ((a, b), (c, d)) & ((a, c), (b, d)) & ((a, d), (b, c)) & \end{array}$$

¿Cuántos cuadros distintos hay para 10 equipos?

Solución.

Llamemos C_n al número de cuadros cuando hay n equipos, luego $C_2 = 1$, $C_3 = 3$, $C_4 = 15$. Busquemos una relación de recurrencia para pasar de C_n a C_{n+1} .

A partir de cada uno de los C_n cuadros de n equipos, los cuadros que salen de $n + 1$ equipos son estos:

- El equipo extra se elimina (podemos pensar que previamente) con cada uno de los n equipos que ya había.
- El extra se elimina con el ganador de cada uno de los partidos disputados en ese cuadro, que son $n - 1$ (pensemos que el paréntesis «)» hace de final de partido).

Entonces, y como resulta evidente que estamos contemplando todas las posibilidades y no hay ninguna contada dos veces, se tiene

$$C_{n+1} = nC_n + (n - 1)C_n = (2n - 1)C_n.$$

Así, $C_2 = 1$, $C_3 = 3 \cdot 1$, $C_4 = 5 \cdot 3 \cdot 1$, $C_5 = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$, $C_6 = 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$; y, en general,

$$C_n = (2n - 3)(2n - 5) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 = (2n - 3)!!$$

Para $n = 10$ queda $C_n = 34\,459\,425$.