Seminario de problemas Curso 2023-24 Hoja 11

Las matemáticas Wasan

El términos *Wasan* se refiere a un tipo concreto de matemáticas que se desarrolló en Japón durante el periodo Edo (entre 1600 y 1867 aproximadamente), cuando estas islas estaban aisladas de las influencias europeas. El término Wasan viene de las palabras *wa* (japonés) y *san* (cálculo) y se usó para distinguir este tipo de matemáticas de las que llegaban de Occidente (*Yosan*). Al comienzo del periodo imperial (1868–1945), el país se abrió a las nuevas tendencias que llegaban de Europa y adoptó la matemática occidental, lo que propició el desuso de las ideas y técnicas del Wasan.

La enseñanza del Wasan estaba abierta a todo el mundo. Por ejemplo, era común encontrarse en los tempos unas tablillas de madera con problemas de matemáticas, muchos de ellos con la circunferencia como protagonista. Son los conocidos como *Sangaku*. Mostramos algunos de ellos en esta hoja de problemas.

Se recomienda resolver los ejercicios de esta hoja por orden, ya que también contiene algunos problemas auxiliares que pueden ser usados como ayuda o pista para resolver los Sangaku que aparecen a continuación.

116. Un triángulo equilátero de lado a se inscribe en una circunferencia de radio R. Prueba que $R = \sqrt{3}/3a$.

Solución. Este problema admite muchas soluciones. Por ejemplo, podemos usar la propiedad de que las medianas de un triángulo se cortan en el baricentro o centro de gravedad. Además, dos tercios de la longitud de cada mediana están entre el vértice y el baricentro, mientras que el tercio restante está entre el baricentro y el punto medio del lado opuesto. En el caso del triángulo equilátero, las medianas coinciden con las alturas y miden $\sqrt{3}/2a$. El centro de gravedad coincide con el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo. Por lo tanto, el radio es

$$R = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{3}.$$

Con conocimientos de trigonometría, aplicando el teorema del coseno al triángulo sombreado en la Figura 1, tenemos

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(2\pi/3) = 3R^2,$$

de donde se sigue el resultado.

También se puede usar la relación entre el ángulo central e inscrito a una circunferencia (el primero es el doble del segundo, véase el triángulo de la derecha de la Figura 1). En nuestro caso,

$$\operatorname{sen}\alpha = 1/2, \qquad \operatorname{sen}(2\alpha) = a/(2R).$$

Por lo tanto,

$$R = \frac{a}{2\operatorname{sen}(2\alpha)} = \frac{a}{4 \times 1/2 \times \sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

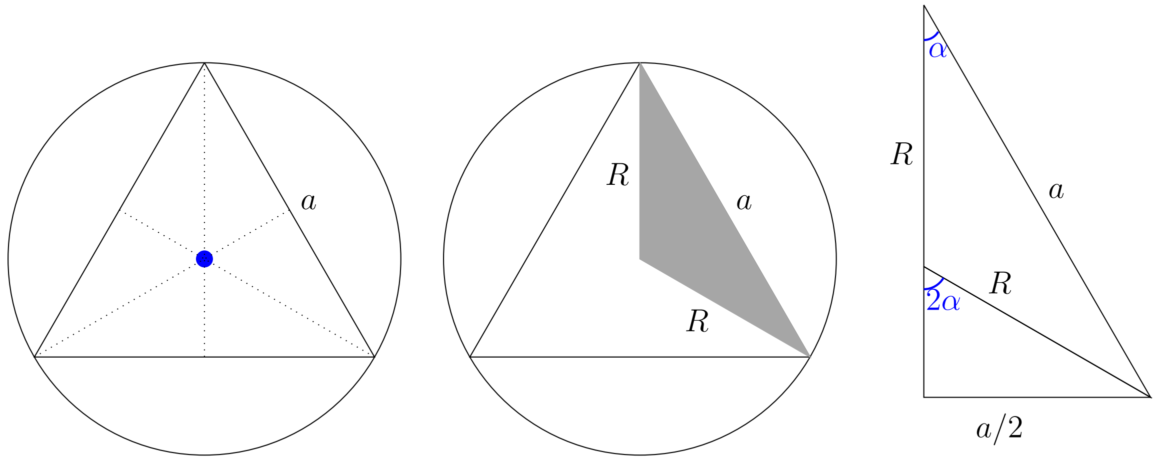

Figura 1: Tres soluciones al primer problema.

117. (Sangaku de Katayamahiko). Tres circunferencias del mismo radio r son tangentes entre sí e inscritas en otra circunferencia de radio r' (véase la figura 2). Demuestra que

$$r' = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right) r.$$

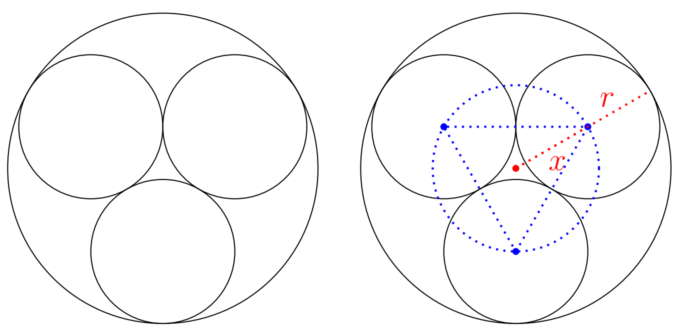

Figura 2: Sangaku de Katayamahiko. El radio de la circunferencia exterior es $r' = x + r$

Solución. Los centros de las tres circunferencias pequeñas son los vértices de un triángulo equilátero de radio $2r$ inscrito en una circunferencia de radio x y con el mismo centro que la circunferencia grande. Notemos que la extensión de las alturas del triángulo corta a la circunferencia exterior y a cada uno de los circunferencias pequeñas en el punto de contacto de las mismas. Entonces $r' = x + r$. Teniendo en cuenta el problema anterior, $x = \sqrt{3}/3 \times 2r$ y, en consecuencia:

$$r' = x + r = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right) r.$$

118. Se consideran dos circunferencias de radios r_1 y r_2 ($r_1 > r_2$) tangentes entres sí y tangentes a una misma recta en los puntos A y B. Si d es la distancia entre A y B, demuestra que $d^2 = 4r_1r_2$.

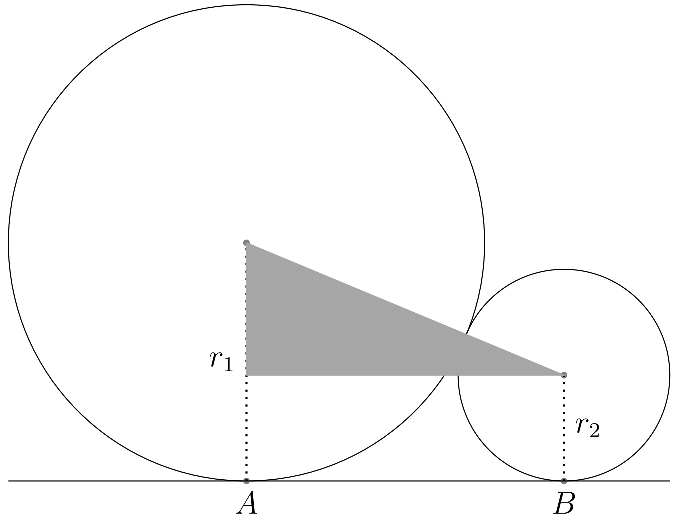

Figura 3: Solución del problema ??.

Solución. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo sombreado en la Figura 3, cuyos catetos son $r_1 - r_2$ y d y cuya hipotenusa es $r_1 + r_2$ se obtiene el resultado:

$$(r_1 + r_2)^2 = d^2 + (r_1 - r_2)^2 \Rightarrow d^2 = 4r_1r_2.$$

119. (Sangaku de Gunma). Se inscribe una tercera circunferencia de radio r, tangente a las dos anteriores y a la misma recta (véase la figura 4). Prueba que

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$

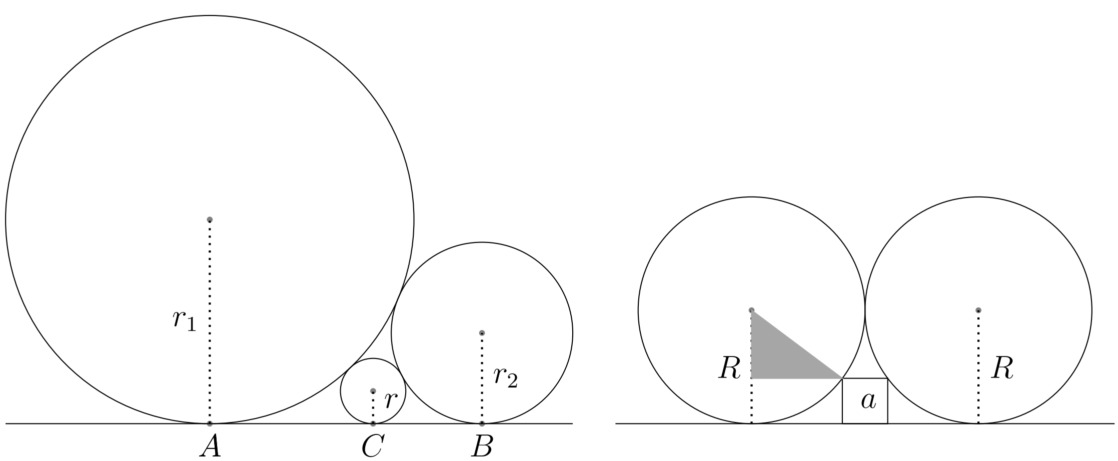

Figura 4: Sangaku de Gunma y su variante.

Solución. Haciendo uso del problema 3, tenemos que

$$\mathrm{dist}(A, C) = 2\sqrt{rr_1}, \quad \mathrm{dist}(C, B) = 2\sqrt{rr_2}, \mathrm{dist}(A, B) = 2\sqrt{r_1r_2}.$$

Por lo tanto, $\sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{r r_1} + \sqrt{r r_2}$, de donde se deduce el resultado pedido.

120. Para dibujar el Sangaku de la figura 4, un artista quiere emplear valores enteros positivos distintos entre sí para los 3 radios, r, r_1 y r_2. Propón cuatro ternas diferentes de posibles radios (r_1, r_2, r).

Solución. A partir del problema anterior, podemos despejar r en función de r_1 y r_2:

$$r = \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1 r_2}}.$$

Una condición suficiente (¿es necesaria?) para que r sean un entero es que $r_1 = a^2$, $r_2 = b^2$, con $a, b \in \mathbb{N}$. Entonces

$$r = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2 + 2ab} = \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2.$$

Ahora, una posibilidad sencilla (¿es la única?) es que $a = \alpha b$, con $\alpha > 1$, $\alpha \in \mathbb{N}$. En este caso,

$$r = \left(\frac{\alpha b}{\alpha + 1}\right)^2$$

es un entero si $b = (\alpha + 1)k$, con $k \in \mathbb{N}$. De esta manera, hemos obtenido una familia de posibles radios, en función de dos parámetros enteros, $\alpha > 1$ y $k \geq 1$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} r_1 & = & \alpha^2(\alpha+1)^2 k^2 \\ r_2 & = & (\alpha+1)^2 k^2 \\ r & = & \alpha^2 k^2. \end{array}\right.$$

Así, por ejemplo, para $k = 1$ y $\alpha = 2$, obtenemos $(r_1, r_2, r) = (36, 9, 4)$; $k = 1$ y $\alpha = 3$, obtenemos $(r_1, r_2, r) = (144, 16, 9)$; para $k = 2$ y $\alpha = 2$, obtenemos $(r_1, r_2, r) = (144, 36, 16)$; para $k = 3$ y $\alpha = 2$, obtenemos $(r_1, r_2, r) = (324, 81, 36)$.

121. (Variante del Sangaku de Gunma). Se consideran 2 circunferencias de radio R, tangentes entres sí y tangentes a una misma recta. Se inscribe un cuadrado de lado a entre las dos circunferencias y la recta (véase la figura 4). Calcula el valor del cociente R/a.

Solución. Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo sombreado en la figura 4, cuyos catetos miden $R - a$ y $R - a/2$ y cuya hipotenusa mide R:

$$R^2 = (R-a)^2 + (R - a/2)^2 \Rightarrow 5a^2 - 12aR + 4R^2 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática se obtienen dos posibles soluciones: $2R = 5a$ o $2R = a$. Como $R > a$, la única solución factible es la primera y, por tanto, $R/a = 5/2$.

122. (Sangaku de los círculos consecutivos). En un sector circular de ángulo 2α se inscriben dos circunferencias tangentes entre sí de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$), como se muestra en la figura 5.

- Prueba que las rectas EG y FG son perpendiculares.
- Prueba que

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1 + \operatorname{sen}\alpha}{1 - \operatorname{sen}\alpha}.$$

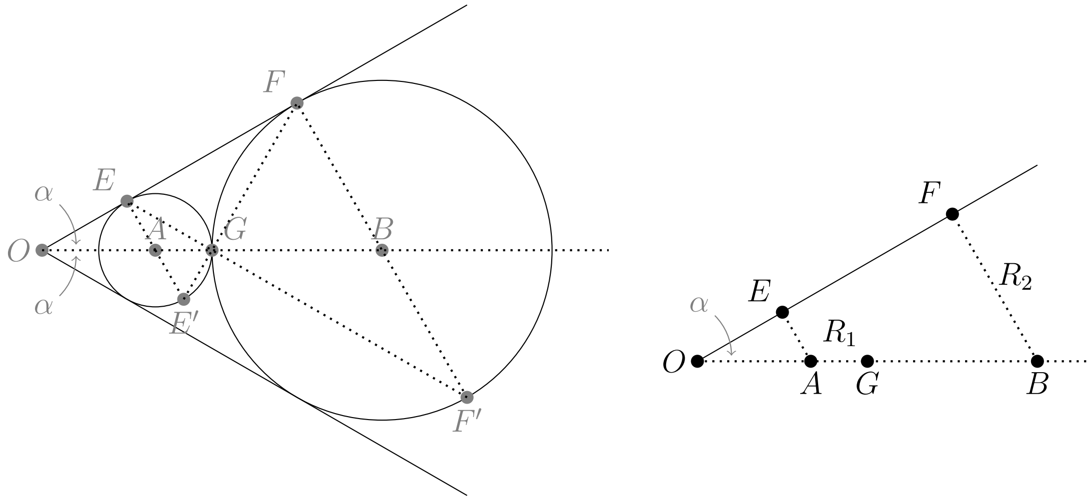

Figura 5: Sangaku de los círculos consecutivos.

Solución. Para la primera parte, construimos los puntos E' y F' como se muestra en la parte izquierda de la figura 5. Entonces, usando la relación entre el ángulo central e inscrito a una circunferencia los ángulos $\widehat{EGE'}$ y $\widehat{FGF'}$ son ángulos rectos. En consecuencia, el ángulo $\widehat{EGF}$ también es recto y la rectas EG y FG son perpendiculares.

Para la segunda parte, tengamos en cuenta los triángulos rectángulos (semejantes) $\triangle EOA$ y $\triangle FOB$ que se muestran en la derecha de la figura 5. El seno de un ángulo α, $\operatorname{sen}\alpha$, es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa. En nuestro caso tenemos que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{R_1}{OA} = \frac{R_2}{OB}.$$

Entonces, por una parte $OG = OA + R_1 = OA(1 + \operatorname{sen}\alpha)$ y, por otra parte, $OG = OB - R_2 = OB(1 - \operatorname{sen}\alpha)$. Igualando las dos expresiones obtenidas para OG:

$$OA(1 + \operatorname{sen}\alpha) = OB(1 - \operatorname{sen}\alpha) \Rightarrow \frac{OB}{OA} = \frac{1 + \operatorname{sen}\alpha}{1 - \operatorname{sen}\alpha}.$$

Como $R_2/R_1 = OB/OA$, se sigue el resultado.