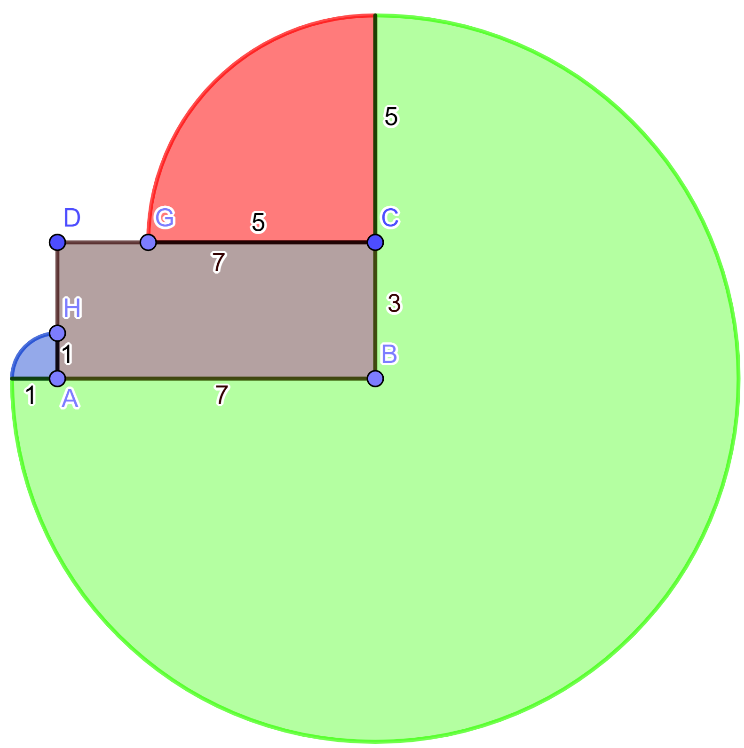
96. En medio de un gran prado hay una cabaña rectangular de 7 metros de largo y 3 de ancho. En el suelo, en una de sus esquinas, se fija una cuerda de 8 metros de largo que en el extremo libre tiene atada una cabra. Hallar el área de pasto que puede utilizar la cabra.

Solución.

La cabaña rectangular (pintada en gris en la imagen) tiene sus esquinas en los puntos A, B, C y D. Fijando la cabra en el punto B, si la cabra intentara ir hacia arriba y luego hacia la izquierda intentando alcanzar el punto D, como la cuerda no puede atravesar las paredes, una vez está en C, tiene 5 metros de libertad de cuerda desde C. Yendo por ese camino, lo más cerca que se quedaría del punto D, sería el punto G.

La misma idea si desde B, la cabra va hacia la izquierda y luego hacia arriba.



La zona posible de pasto para la cabra es la unión de la zona roja (1/4 de círculo de radio 5), la zona azul (1/4 de círculo de radio 1) y a zona verde (3/4 de círculo de radio 8). Así que el área de pasto que puede utilizar la cabra es:

$$A = \frac{1}{4}\pi\ 5^2 + \frac{1}{4}\pi\ 1^2 + \frac{3}{4}\pi\ 8^2 = \frac{109}{2}\pi\ \ m^2$$

97. Si escribimos ordenadamente todos los números de cinco cifras distintas que pueden formarse con los dígitos $1, 2, 3, 4$ y 5 (empezando por 12345, hasta 54321), ¿qué lugar ocupará 35142?

Solución.

En la lista, es claro que el primer número es el 12345, el segundo es el 12354 y el último el 54321. En la lista iríamos escribiendo los números de la siguiente forma:

- 1 _ _ _ _ (números que empiezan por 1)
  Son las posibles ordenaciones de 4 elementos distintos (permutaciones sin repetición): así que $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ números empezando por 1.
- 2 _ _ _ _ (números que empiezan por 2)
  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ números empezando por 2.
- 3 1 _ _ _ (números que empiezan por 3 1)
  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ números empezando por 3 1.
- 3 2 _ _ _ (números que empiezan por 3 2)
  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ números empezando por 3 2.
- 3 4 _ _ _ (números que empiezan por 3 4)
  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ números empezando por 3 4.

En esa lista, hasta el momento llevaríamos escritos $24 + 24 + 6 + 6 + 6 = 66$ números.

Justo el siguiente número sería el 35124 y ocuparía la posición 67. Así que el número pedido, el 35142 (justo el siguiente al 35124 en la lista), ocuparía la posición 68.

98. Hallar todos los números naturales de cuatro cifras que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.

Solución.

Si a, b, c y d son las cifras de las unidades de millar, centenas, decenas y unidades respectivamente, podemos plantear encontrar las letras que cumplen lo siguiente:

$$1000a + 100b + 10c + d = (a + b + c + d)^3$$

Sin embargo, en vez de continuar con la anterior ecuación, es importante darse cuenta de que los números buscados son cubos perfectos y cabe preguntarse si hay muchos cubos perfectos de cuatros cifras. Igual no son tantos y podemos comprobar, para cada uno de ellos, si sus cifras cumplen lo pedido. El primer cubo perfecto de cuatro cifras es el $10^3 = 1000$, pero, claramente, no cumple que el cubo de la suma de sus cifras coincide con el número, ya que $(1 + 0 + 0 + 0)^3 \neq 1000$. El siguiente cubo perfecto es $11^3 = 1331$ y el cubo perfecto más grande de cuatro cifras es $21^3 = 9261$ (ya que $22^3 = 10648$ tiene cinco cifras).

Comprobamos la condición de las cifras para los 12 cubos perfectos de cuatro cifras:

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Cubo perfecto	1000	1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6859	8000	9261
Cumple condición	No	No	No	No	No	No	No	Sí	Sí	No	No	No

Así que los únicos números naturales que son iguales al cubo de la suma de sus cifras son:

- 4913. Ya que $(4+9+1+3)^3 = 17^3 = 4913$.
- 5832. Ya que $(5+8+3+2)^3 = 18^3 = 5832$.

Desde luego, si el número de casos es excesivamente grande, no tiene sentido plantearse estudiar cada uno de ellos. Pero, en este caso, por ser doce el número de casos, resulta efectivo poder estudiar cada uno de ellos.

99. En una ciudad, 2/3 de los hombres están casados con los 3/5 de las mujeres. Si nunca se casan con personas forasteras y todos los matrimonios que se han contraído son heterosexuales, ¿cuál es la proporción de personas solteras en dicha ciudad?

Solución.

Vamos a denotar con H y con M el número de hombres y mujeres de la ciudad respectivamente. Sea p la proporción buscada de personas solteras en la ciudad.

$$p = \frac{\text{número de personas solteras en la ciudad}}{\text{número de personas de la ciudad}}$$

- Nº personas de la ciudad: $H + M$
- Nº de personas casadas: $\frac{2}{3}H + \frac{3}{5}M$
- Nº de personas solteras: $\frac{1}{3}H + \frac{2}{5}M$

Así que la proporción buscada es:

$$p = \frac{\frac{1}{3}H + \frac{2}{5}M}{H+M} = \frac{5H+6M}{15(H+M)}$$

Ahora, como en la ciudad 2/3 de los hombres están casados con los 3/5 de las mujeres, nunca se casan con personas forasteras y todos los matrimonios que se han contraído son heterosexuales, podemos establecer esta ecuación que relaciona el número de hombres (H) y mujeres (M) en la ciudad:

$$\frac{2}{3}H = \frac{3}{5}M \Rightarrow H = \frac{9}{10}M$$

Sabiendo ahora que $H = \frac{9}{10}M$, sustituimos el valor de H en la proporción buscada:

$$p = \frac{5H+6M}{15(H+M)} = \frac{\frac{9}{2}2M + 6M}{15(\frac{9}{10}M + M)} = \frac{21M}{67M} = \boxed{\frac{7}{19}}$$

100. Con los números del 20 al 28 completa un cuadrado mágico 3x3 de forma que obtengas la misma suma en todas direcciones, en horizontal, en vertical, e incluso en las dos diagonales.

Solución.

Construyamos antes un cuadrado mágico similar con los números del 1 al 9, así a este solo habrá que sumarle 19 a cada celda para obtener el pedido.

La suma de las 9 cifras es 45. Cada fila sumará 15 (también sumarán 15 cada columna y cada diagonal).

Las formas de sumar 15 con tres cifras distintas son:

$$9+5+1=9+4+2=8+6+1=8+5+2=8+4+3=7+6+2=7+5+3=6+5+4$$

(Notar el orden fijado para no olvidar ninguna posibilidad).

El 5 aparece en 4 sumas, luego ocupa la posición central del cuadrado. Los números 8, 2, 4 y 6 aparecen en 3 sumas, por lo que ocupan una esquina. Los números 9, 3, 7 y 1 aparecen en 2 sumas, así que no están ni en el centro ni en las esquinas. Con todo esto, una posible distribución es la siguiente:

4	9	2
3	5	7
6	1	6

Sumando 19 a cada celda obtenemos la solución:

23	28	21
22	24	26
27	20	25

Y cualquier otra distribución válida es una rotación del anterior cuadrado.

101. Halla todas las soluciones enteras de la ecuación:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2023}.$$

Solución.

Vamos a usar la notación $\mathbb{N}$ para referirnos a los números naturales $\{1,2,3,...\}$ y con $a \in \mathbb{N}$ nos referimos a que a es un número natural.

Despejamos a en la ecuación y le exigimos que sea un número natural:

$$a=\left(\sqrt{2023}-\sqrt{b}\right)^2=2023+b-2\sqrt{2023}$$

Como $2023=7\cdot 17^2$, para que $a\in\mathbb{N}$:

$$\sqrt{2023b}\in\mathbb{N}\cup\{0\}\Leftrightarrow\sqrt{7\cdot 17^2\cdot b}=17\sqrt{7b}\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

Así que b es de la forma $b=7x^2$, con $x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ (podría ser $x\in\mathbb{Z}$, pero así evitamos después el trabajar con el valor absoluto).

Procediendo de igual manera con b, concluimos que a es de la forma $a=7y^2$, con $y\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Así que la ecuación del enunciado se convierte en la siguiente:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2023}\Longrightarrow\sqrt{7y^2}+\sqrt{7x^2}=17\sqrt{7}\Longrightarrow x+y=17$$

Todas las soluciones (x, y) de esta ecuación son:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
y	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Así que todas las soluciones enteras de la ecuación original (a, b) son las siguientes:

$7y^2 = a$	0	7	28	63	112	175	252	343	448
$7x^2 = b$	2023	1792	1575	1372	1183	1008	847	700	567

$7y^2 = a$	567	700	847	1008	1183	1372	1575	1792	2023
$7x^2 = b$	448	343	252	175	112	63	28	7	0

102. Halla todos los números naturales a, b y c, de forma que:

$$5^a - 5^b - 5^c = 12475.$$

Solución.

Vamos a tener en cuenta las siguientes descomposiciones factoriales: $12475 = 5^2 \cdot 499$ y $500 = 5^3 \cdot 2^2$.

- Supongamos que $c < b$. Sacamos factor común:

$$\begin{aligned} 5^a - 5^b - 5^c &= 12475 \\ 5^c(5^{a-c} - 5^{b-c} - 1) &= 12475 \\ 5^c(5^{a-c} - 5^{b-c} - 1) &= 5^2 \cdot 499 \end{aligned}$$

  Así, tenemos que $c = 2$. Vamos a repetir el argumento, cambiando $p = a - 2$ y $q = b - 2$.

$$\begin{aligned} 5^{a-2} - 5^{b-2} - 1 &= 499 \\ 5^p - 5^q &= 500 \\ 5^q(5^{p-q} - 1) &= 5^3 \cdot 2^2 \end{aligned}$$

  Con lo que $q = 3$ y entonces $5^{p-3} = 5$. Llegamos a que $p = 4$ y, en consecuencia, $a = 6$, $b = 5$ y $c = 2$ es una solución para la ecuación planteada.
- Si ahora suponemos que $b < c$, simplemente se intercambian el papel las incógnitas b y c, por lo que otra solución para la ecuación planteada es $a = 6$, $b = 2$ y $c = 5$.
- Por último, el caso $b = c$ no nos aporta soluciones, ya que entonces:

$$\begin{aligned} 5^a - 2 \cdot 5^b &= 5^2 \cdot 499 \\ 5^b(5^{a-b} - 2) &= 5^2 \cdot 499 \end{aligned}$$

  Con lo que $b = 2$ y entonces $5^{a-2} = 499$, pero la ecuación $5^{a-2} = 501$ no tiene solución natural.

Así que hay dos posibles soluciones:

$$\boxed{a = 6, b = 5, c = 2} \quad \boxed{a = 6, b = 2, c = 5}$$