Seminario de problemas Curso 2021-22. Hoja 11. Soluciones

76. El año 2021 que acabamos de abandonar puede representarse como

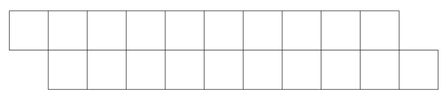
$$2021 = 45^2 - 2^2.$$

¿Puedes expresar también 2022 como diferencia de los cuadrados de dos números naturales?

Solución:

Módulo 4, un cuadrado es congruente con 0 o 1. La diferencia de dos cuadrados es congruente con 0, 1 o 3, pero 2022 es congruente con 2, por lo que 2022 no puede expresarse como diferencia de dos cuadrados.

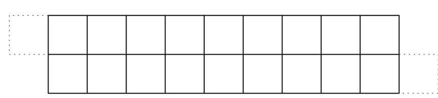
77. Considera el tablero



y colorea sus casillas usando los colores AZUL, ROJO y VERDE de modo que cualesquiera dos casillas adyacentes (horizontal o verticalmente) no compartan el mismo color. ¿De cuántas formas puedes hacerlo?

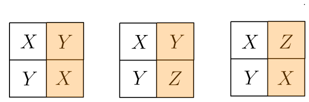
Solución:

Hay dos casillas en los extremos (líneas punteadas) y dieciocho casillas centrales (líneas continuas):



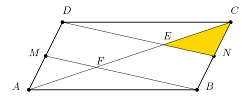
Una vez coloreadas las casillas centrales disponemos de 2 posibilidades para colorear cada una de los extremos, así que basta multiplicar por 4 el número de formas de colorear las casillas centrales.

Coloreamos cada bloque de dos casillas verticales, comenzando desde el de la izquierda. El primer bloque se puede colorear de 6 formas. Una vez coloreado un bloque, digamos con los colores X, Y, hay 3 formas de colorear el bloque siguiente



Por lo tanto existen $6{\cdot}3^8$ posibilidades para colorear las casillas centrales y $4{\cdot}6{\cdot}3^8 = 157464$ formas de colorear el tablero que nos proponen.

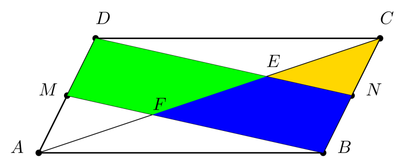
78. Dado el paralelogramo



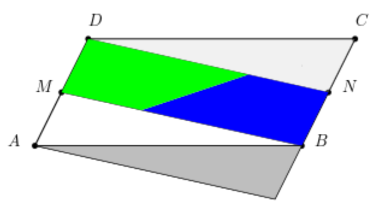
de área 24 y vértices A, B, C, D, calcula el área del triángulo CEN, donde M y N son los puntos medios de los lados que los contienen.

Solución:

Sea x el área del triángulo CEN. Este triángulo es semejante al CFB, pero las longitudes de sus lados son la mitad que la de los lados de CFB. Por lo tanto, el área de la zona azul



es $4x - x = 3x$. El área de la zona verde es la misma que la de zona azul, así que, juntas, las zonas azul y verde tienen un área de $6x$. Desplazando la zona gris claro hasta la zona gris oscuro en la siguiente figura vemos que el área conjunta de las zonas azul y verde es la mitad de la del paralelogramo,



es decir, $6x = 24/2$, por lo que el área que nos piden es $x = 2$.

79. El número 2022 cumple que <u>su inverso es suma de los inversos de dos números naturales múltiplos de 3</u>:

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{4044} + \frac{1}{4044}.$$

¿Existe algún año en la presente década que NO posea dicha propiedad?

Solución:

Sea n un año de la presente década. Queremos comprobar si existen números N y M tales que

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{3N} + \frac{1}{3M}.$$

Esto equivale a

$$3NM = n(N + M).$$

Probamos primero si es posible encontrar un N que sea múltiplo de n, es decir, $N = An$ para algún número A. Esto implica

$$3nAM = n(An + M).$$

Simplificando n, $3AM = An + M$. Esto nos dice que M es múltiplo de A, digamos $M = Ax$. Por lo tanto, $3AAx = An + Ax$. Simplificando A, $3Ax = n + x$. Ahora sabemos que n debe ser múltiplo de x, digamos $n = xy$. Así, $3Ax = xy + x$, por lo que $3A = y + 1$ e y debe ser congruente con 2 módulo 3.

Le damos la vuelta al razonamiento anterior. Si n admite un divisor y congruente con 2 módulo 3 entonces $y+1 = 3A$ para algún A y podemos definir $N = An = Axy$ y $M = Ax$. De este modo,

$$\frac{1}{3N} + \frac{1}{3M} = \frac{1}{3Axy} + \frac{1}{3Ax} = \frac{y+1}{3Axy} = \frac{3A}{3Axy} = \frac{1}{n}$$

y n posee la propiedad del enunciado. Ya sabemos que los años que admitan un divisor congruente con 2 módulo 2 cumplirán la propiedad del enunciado.

Todos los años pares admiten un divisor $y = 2$ congruente con 2 módulo 3, por lo que poseen la propiedad. Como 47 (o 2021) divide a 2021, 17 divide a 2023, 5 divide a 2025 y 2027 divide a 2027, basta examinar $n = 2029$, que es un número primo.

La relación $3NM = n(N + M)$ para $n = 2029$ implica que, salvo cambio de papel entre N y M, n divide a N; pero en tal caso n debería tener un divisor congruente con 2 módulo 3, lo que es falso.

Por lo tanto el único año de esta década que no cumple la propiedad del enunciado es 2029.

80. En una circunferencia se inscribe un polígono regular de 2022 lados, cuyos vértices se numeran consecutivamente en sentido horario comenzando por 1. Estos vértices se dividen en tres grupos: los comprendidos entre 1 y 674, los comprendidos entre 675 y 1348, y los restantes. ¿Cuál es el menor número n de vértices que debemos elegir en cada grupo de modo que pueda asegurarse que entre los $3n$ vértices escogidos haya tres que sean los vértices de un triángulo equilátero.

Solución:

El polígono regular de 2022 lados permite construir $N = 2022/3 = 674$ triángulos equiláteros. El i-ésimo de estos triángulos está determinado por los vértices $i, i+N, i+2N$ del polígono. Hay un vértice de este triángulo en cada uno de los tres grupos que menciona el enunciado.

Al elegir n vértices del primer grupo, $N - n$ vértices del segundo no proporcionan ningún triángulo equilátero. En el peor de los casos solo $n - (N - n) = 2n - N$ vértices del segundo grupo nos servirán. Pero claro, en el peor de los casos solo $n - (N - (2n - N)) = 3n - 2N$ vértices del tercer grupo pueden usarse para encontrar dichos triángulos. Por lo tanto, para garantizar la existencia de alguno de estos triángulos debe cumplirse $3n > 2N$.

Así que el menor número n que pide el enunciado es 450.

81. El número 2022, aparte de ser par, tiene la siguiente pintoresca propiedad: al dividirlo entre la suma de sus dígitos se obtiene un número primo. ¿Cuántos años en este siglo son pares y poseen dicha propiedad?

Solución:

Un año par de este siglo tendrá la forma **20XY** (usaremos negrita para resaltar que expresamos un número usando sus dígitos) para ciertos dígitos $0 \leq X, Y \leq 9$, con Y par.

Si $\mathbf{20XY} = (2+X+Y)p$ para algún primo p, módulo 2, Y es congruente con $X+Y$, por lo que X debe ser par. Así, $X = 2A$ e $Y = 2B$ con $0 \leq A, B \leq 4$ y $\mathbf{10AB} = (1+A+B)p$. Módulo 2 tenemos que B es congruente con $1 + A + B$, por lo que A es impar. Como $0 \leq A \leq 4$, $A \in \{1, 3\}$.

Si $A = 3$ entonces $\mathbf{103B} = (4+B)p$. Como $\mathbf{1030} \neq 4p$, $\mathbf{1031} \neq 5p$, $\mathbf{1032} \neq 6p$, $\mathbf{1033} \neq 7p$ y $\mathbf{1034} \neq 8p$, la posibilidad $A = 3$ queda descartada.

Si $A = 1$ entonces $\mathbf{101B} = (2 + B)p$. Como $\mathbf{1010} \neq 2p$, $\mathbf{1012} \neq 4p$, $\mathbf{1013} \neq 5p$ y $\mathbf{1014} \neq 6p$, solo queda la posibilidad $A = 1$ y $B = 1$, que se corresponde con $n = 2022$.

Por lo tanto **2022** es el único año par de este siglo que cumple la propiedad del enunciado.

82. Un grupo teatral compuesto por 7 personas desea organizar sus ensayos. En cada ensayo algunos componentes hacen de público mientras el resto actúa. Durante el transcurso de los distintos ensayos cada actor debe haber visto actuar a cada uno de sus compañeros al menos una vez. ¿Cuál es el número mínimo de ensayos que deben organizarse?

Solución:

Formamos una tabla con tantas filas como actores. Cada columna se corresponde con un ensayo. Si el actor i actúa en el ensayo j, ponemos un 1 en la fila i/columna j de la tabla; en caso contrario ponemos un 0. Un ejemplo de tabla para 5 ensayos podría ser

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0
3	1	0	0	1	0
4	1	0	0	0	1
5	0	1	1	0	0
6	0	1	0	1	0
7	0	1	0	0	1

¿Bastarían 4 ensayos? La respuesta será que no, así que el mínimo número de ensayos necesarios es 5. Veámoslo.

En una tabla de ensayos que cumpla lo que se pide,

($*$) *dadas dos filas, en alguna columna la primera fila tiene un* 1 *y la segunda un* 0, *y viceversa (cada actor debe ver la actuación de cualquiera de sus compañeros).*

Si existiese alguna tabla de ensayos con 4 columnas (4 ensayos), a lo sumo habría $2^4 - 2 = 14$ posibilidades para sus filas (no se permiten filas con todo ceros o con todo unos). Esto implica que alguna fila tiene un único 1 o un único 0. Intercambiando el papel de los unos y los ceros podemos asumir que alguna fila tiene un único 1. Reordenando los ensayos y los actores podemos asumir que la primera fila es 1000. Las otras 6 filas deben tener un 0 en la primera posición (y no pueden contener ni todo ceros ni todo unos en las demás posiciones). Esto implica que las otras 6 filas deben ser $0100, 0010, 0110, 0001, 0101, 0011$, lo que es incompatible con ($*$).