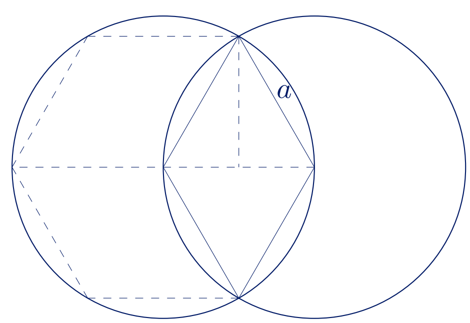
78. *Homenaje a* Cacumen, *con reproche*: En el antiguo reino de Trapizonda, que nunca existió, a los reos condenados a muerte se les concedía una última oportunidad: eran puestos, con los ojos vendados, en un lugar aleatorio del interior de un círculo pintado en el suelo, desde donde debían caminar (en línea recta y en la dirección que quisieran) una distancia igual al radio. Si no se salían del círculo eran liberados. ¿Qué probabilidad tenían de lograrlo?

Nota: la aleatoriedad de la posición en el círculo era *uniforme*: la probabilidad de ser puestos en una región cualquiera era proporcional al área de dicha región.

Llamaremos R al radio del círculo. El condenado elige una dirección determinada en la que caminar. Lo que sigue vale para cualquier dirección. Vamos a pintar el círculo girándolo como nos convenga, de manera que esa dirección sea hacia la derecha. Los posibles sitios de llegada son la traslación del círculo una distancia R a la derecha, que es otro círculo de radio R cuyo centro está en el extremo a la derecha del inicial. Como una traslación conserva las áreas, la probabilidad de que el condenado haya partido de un punto que le lleve a la intersección entre el círculo trasladado y el inicial, y con ello se salve, es $A/(\pi R^2)$, donde A es el área de dicha intersección.



En el dibujo vemos el círculo y su trasladado, y algunos elementos accesorios que nos permiten calcular fácilmente el área A: la altura marcada mide $R \operatorname{sen} 60^{\circ} = R\sqrt{3}/2$, luego

$$A = \frac{R^2\sqrt{3}}{2} + 4\,a\,,$$

donde a el área del segmento circular indicado y $R^2\sqrt{3}/2$ es el área del rombo inscrito. Si prescindimos de los dos segmentos circulares de la izquierda lo que queda en la intersección es una tercera parte del círculo, así que

$$\frac{\pi R^2}{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2} + 2\,a\,,$$

y de ambas igualdades se sigue que $A = \dfrac{2\pi R^2}{3} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$. Dividiendo por πR^2 concluimos que la probabilidad de ser liberado era igual a

$$\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.391002\,.$$

79. Decimos que un dado es equilibrado si las seis caras salen con la misma probabilidad. Si lanzamos dos veces consecutivas un dado equilibrado, halla la probabilidad de obtener ambas veces el mismo resultado. Prueba también que, si el dado no es equilibrado, la probabilidad es mayor.

Llamemos p_i a la probabilidad de que salga i para $i = 1, \ldots, 6$, de modo que $0 \leq p_i \leq 1$ y $p_1 + \cdots + p_6 = 1$. En el caso equilibrado $p_i = 1/6$ para cada i.

En general, la probabilidad de que salga i las dos veces es p_i^2, y entonces la probabilidad de sacar dobles es $p_1^2 + \cdots + p_6^2$.

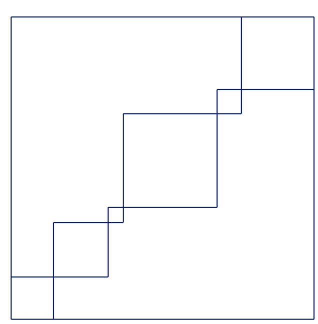
En particular, en el caso equilibrado resulta que la probabilidad es $6 \times 1/6^2$, es decir $1/6$; lo podríamos haber calculado de otra manera: sea cual sea el primer resultado, la probabilidad de repetir en el segundo es $1/6$ (el primer resultado juega en este argumento el mismo papel que la dirección que elige el condenado en el primer problema).

Tenemos que probar que si algún p_i es distinto de $1/6$ entonces $p_1^2 + \cdots + p_6^2 > 1/6$. Podemos hacerlo usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz que apareció en la sesión de desigualdades, aplicándola a $(p_1, p_2, \ldots, p_6)$ y a $(1, 1, \ldots, 1)$: obtenemos que

$$1 = p_1 + \cdots + p_6 \leq \sqrt{6}\,\sqrt{p_i^2 + \cdots + p_6^2}\,,$$

(equivale a que $\dfrac{p_i + \cdots + p_6}{6} \leq \sqrt{\dfrac{p_1^2 + \cdots p_6^2}{6}}$, la desigualdad entre la media aritmética y la cuadrática que también se vio en esa sesión). Basta con elevar al cuadrado para probar la desigualdad no estricta, y sabemos que únicamente se da la igualdad si $p_1 = \cdots = p_6$, así que en el caso no equilibrado la desigualdad es estricta.

Una interpretación geométrica de lo anterior es que, en el siguiente dibujo, el área que suman los cuadrados interiores es la mínima posible cuando todos son del mismo tamaño, y solo entonces (y, por supuesto, esto se puede aplicar a cualquier número de ellos, o sea a dados de n caras).



80. Una permutación de $(1, 2, \ldots, n)$ fija un número de elementos variable entre 0 y n. Por ejemplo, para $n = 5$, la permutación $(1, 3, 5, 4, 2)$ fija dos elementos –solo 1 y 4 están en su lugar inicial– y $(2, 5, 1, 3, 4)$ no fija ninguno. Calcula el promedio del número de elementos que fijan todas las permutaciones de $(1, 2, \ldots, n)$.

Veamos dos maneras de probar que el promedio, para cualquier valor de n, es 1.

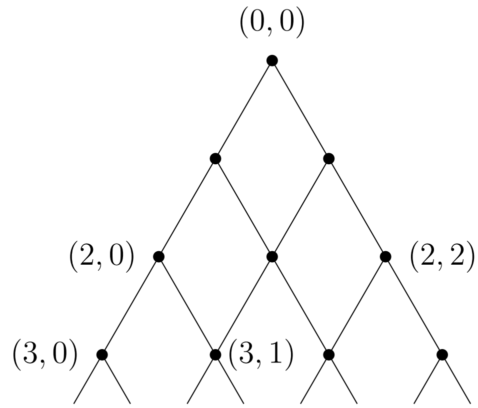
Entenderemos en lo que sigue una *fijación* como la pareja que forman una permutación y un valor fijado por ella. Tenemos que ver que el número de fijaciones es igual al número de permutaciones. Es razonable conjeturarlo después de contarlas en los casos $n = 2$ y $n = 3$, y tal vez $n = 4$ (salen, respectivamente, 2, 6 y 24 permutaciones). Llamaremos $P(n)$ al número de permutaciones, que más usualmente se llama *factorial* de n y se escribe $n!$.

La primera manera es la más usual: el cociente entre el número de fijaciones y el de permutaciones es la suma de los cocientes $F_i(n)/P(n)$, donde $F_i(n)$ es el número de fijaciones de i, o sea el número de permutaciones que fijan i. Por simetría, al repasar todas las permutaciones todos los valores se darán en el lugar i el mismo número de veces, así que el cociente correspondiente es $1/n$, y el promedio es en efecto

$$\frac{F_1(n)}{P(n)} + \cdots + \frac{F_n(n)}{P(n)} = n \times \frac{1}{n} = 1\,.$$

La segunda manera consiste en definir la siguiente biyección del conjunto de fijaciones en el de permutaciones: a cada fijación le asignamos la permutación que resulta si el valor fijo en cuestión lo pasamos al final. Por ejemplo, a la fijación $(1, 3, 5, 4, 2)$ le asignamos la permutación $(1, 3, 5, 2, 4)$. Otro ejemplo con $n = 8$: la permutación $(2, 6, 3, 1, 7, 4, 8, 5)$ es la imagen de la fijación $(2, 6, 3, 1, 5, 7, 4, 8)$ y no lo es de ninguna otra. Es decir, la biyección inversa asigna a cada permutación la fijación de su último número al moverlo al lugar que dice su valor.

81. Este trata sobre caminos aleatorios: una partícula cae desde la cúspide (nivel 0) de un mallado triangular como el del dibujo en un descenso sin fin. Si a los nodos del nivel n los denominamos $(n,0),(n,1),\ldots,(n,n)$, entonces del nodo (n,k) puede descender bien al $(n+1,k)$ o bien al $(n+1,k+1)$.



Llamaremos $c_{n,k}$ al número de maneras de llegar a (n,k), y $p_{n,k}$ a la probabilidad de que un camino descendente pase por (n,k), supuesto que la probabilidad de tomar cada bifurcación es 1/2.

a) Expresa la relación de recurrencia que determina $c_{n+1,k}$ en función de los valores $c_{n,i}$.

b) Expresa la relación análoga para $p_{n+1,k}$.

c) Prueba que $\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} = 2^n$ para cada n. ¿Cómo se interpreta combinatoriamente esta identidad?

d) Prueba que $\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = 1$ y que $\sum_{k=0}^{n} p_{n+k,k} = 1$ para cada n. ¿Cómo se interpretan probabilísticamente ambas identidades?

---

a) Si $k=0$ o $k=n$ es claro que $c_{n,k}=1$, siempre tenemos que bajar hacia la izquierda o siempre hacia la derecha. Para llegar a $(n+1,k)$ con $1 \le k \le n$, solo podemos hacerlo desde $(n,k-1)$ o desde (n,k), y hay tantas maneras de llegar desde cada uno como maneras hay de llegar hasta ellos. Es decir

$$c_{n+1,k} = c_{n,k-1} + c_{n,k}\,.$$

$c_{n,k}$ es el *número binomial* que se expresa mucho más habitualmente $\binom{n}{k}$ y se lee "n sobre k". Notemos que cada camino que lleva a (n,k) consta de n pasos, k de los cuales son hacia la derecha y $n-k$ son hacia la izquierda, y cuáles sean esos k (o esos $n-k$, lo mismo da) determina qué camino hemos seguido.

Por tanto (mantenemos nuestra notación), $c_{n,k}$ expresa el número de subconjuntos de k elementos que podemos tomar dentro de un conjunto de n elementos (eso no depende de la naturaleza de los conjuntos, y en nuestro caso se trata del conjunto de n pasos).

El "lo mismo da" de antes nos dice que $c_{n,k}=c_{n,n-k}$. Atendiendo a la recurrencia vista, el *triángulo de Pascal* (o *de Tartaglia*) que forman estos números binomiales empieza así:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Cada valor es la suma de los dos que tiene sobre él – si solo hay uno el otro es 0–.

b) La probabilidad $p_{n+1,k}$ de llegar a $(n+1,k)$, con $1 \leq k \leq n$, es la suma de las de llegar haciéndolo desde $(n,k-1)$ y desde (n,k); la primera es el producto de $p_{n,k-1}$ (la probabilidad de llegar a $(n,k-1)$) por $1/2$ (la de seguir hacia la derecha), y la segunda es análogamente $p_{n,k} \times (1/2)$, así que en este caso

$$p_{n+1,k} = \frac{p_{n,k-1} + p_{n,k}}{2}\,.$$

Por otro lado, para cada n vemos que $p_{n,0} = p_{n,n} = (1/2)^n = 1/2^n$, ya que llegamos hasta $(n,0)$ o (n,n) solo si los n pasos son a la derecha o los n son a la izquierda.

Cada valor es el promedio de los que tiene sobre él, y el triángulo análogo al anterior empieza

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1/2 \;\; 1/2 \\ 1/4 \;\; 2/4 \;\; 1/4 \\ 1/8 \;\; 3/8 \;\; 3/8 \;\; 1/8 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

No merece la pena poner más filas, porque queda claro (y se prueba muy fácilmente por inducción) que

$$p_{n,k} = \frac{c_{n,k}}{2^n}\,.$$

c) La igualdad $\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} = 2^n$ dice que el número total de subconjuntos que podemos tomar de uno de n elementos es 2^n, o también, y más literal de acuerdo a lo que hacemos, que el número total de maneras de llegar al nivel n es 2^n. De hecho una prueba habitual de lo primero resulta al identificar los subconjuntos con las n-tuplas de 0s y 1s (por ejemplo, el subconjunto $\{1,4,5\}$ del conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ se corresponde con $(1,0,0,1,1,0,0)$), y es obvio que podemos pensar alternativamente las n-tuplas como caminos (0 es derecha y 1 es izquierda o viceversa).

Además, ya hemos dicho que la igualdad equivale a la primera de las dos que restan por demostrar:

d) Equivalentemente a la anterior,

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = 1\,.$$

Es inmediato, ya que todo camino descendente alcanza el nivel n y lo hace por un solo punto, de forma que las probabilidades de pasar por cada (n,k) suman 1 cuando k recorre los valores $0,1,\dots,n$.

Menos directa es la otra identidad,

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n+k,k} = 1\,.$$

Vamos a fijarnos en la semidiagonal descendente que indican sus sumandos, la que pasa por los nodos $(n,0)$, $(n+1,1)$, $(n+2,2)$, …, $(n+n,n)=(2n,n)$ (este último es el nodo central del nivel $2n$). A falta de un dibujo, se sugiere que lo haga el lector para $n=4$.

Nos fijamos también en la inmediata inferior, que pasa por $(n+1,0)$, $(n+2,1)$, $(n+3,2)$, …, $(2n+1,n)$. La probabilidad de que un camino pase por esta es $1/2$, ya que con la misma probabilidad podría pasar por la simétrica que une $(2n+1,n+1)$ con $(n+1,n+1)$, y todos caminos pasan por una sola de las dos. Nos fijamos en la probabilidad de que *el primer nodo que toque* un camino que pase por esta semidiagonal inferior (notemos que puede pasar por varios de ellos) sea $(n+1+k,k)$. La suma de dichas probabilidades para cada k es $1/2$, y solo queda notar que el primer nodo en el camino es $(n+1+k,k)$ si y solo si el camino ha llegado a (n,k) y luego sigue hacia la izquierda. Es decir, la probabilidad de que el primer nodo sea $(n+1+k,k)$ es $p_{n,k}\times(1/2)$, y

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\,p_{n+k,k}\,.$$

Nota. En lo anterior (y en lo que sigue) no nos hace falta, pero es obligado decir, usando ya la notación habitual en lugar de $P(n)$ y $c_{n,k}$, que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

Un ejercicio recomendable es tratar de demostrarlo a partir de nuestra presentación.

82. Epi y Blas tenían en una urna $2n$ bolas de cristal, distintas tan solo por su color: n blancas y n negras. En lugar de jugarse las cosas a cara o cruz, Epi sacaba dos de las bolas a ciegas, y ganaba si eran de distinto color. Calcula si tenía ventaja.

El caso es que les gusta jugarse las cosas con esa probabilidad, pero por desgracia han perdido una de las bolas. ¿Qué deben hacer?

Vamos a pensar que Epi sacaba las dos bolas en secuencia. Sea cual sea la primera, la probabilidad de que la segunda fuera de distinto color es

$$\frac{n}{2n-1}$$

(otra vez el argumento de los dos primeros problemas de la hoja), que es mayor que $1/2$, por lo que efectivamente Epi tenía ventaja.

La respuesta más sencilla a la segunda pregunta es como sigue: Epi extrae una bola y gana si es de distinto color que la que se ha perdido, con probabilidad $n/(2n-1)$.

Veamos en cualquier caso que, si han perdido una bola, pueden jugar exactamente igual que antes y la probabilidad no cambiará:

Una forma de verlo consiste en contar los casos favorables y dividir su número por el de casos posibles en cada situación, ya que los casos posibles (los subconjuntos de 2 bolas entre $2n-1$ o entre $2n$) son todos equiprobables.

En la situación anterior a la triste pérdida, el número de casos favorables era n^2 (uno por cada par de una bola blanca y una negra), y en la situación posterior es $n(n-1)$ por la misma razón. El de casos favorables era $\binom{2n}{2}$ antes de la pérdida y tras ella es $\binom{2n-1}{2}$. Si ya sabemos calcular todos los números binomiales terminamos rápidamente. Si no, notamos que ya hemos visto que

$$\frac{n^2}{\binom{2n}{2}} = \frac{n}{2n-1}, \quad \text{luego} \quad \binom{2n}{2} = n(2n-1)\,.$$

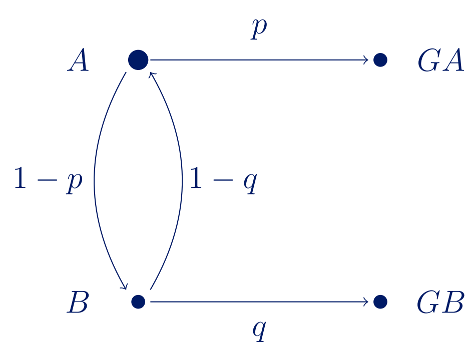
Es claro que $\binom{n}{1} = n$, y sabemos que $\binom{2n}{2} = \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-1}{2} = 2n-1+\binom{2n-1}{2}$, así que

$$\frac{n(n-1)}{\binom{2n-1}{2}} = \frac{n(n-1)}{n(2n-1)-(2n-1)} = \frac{n(n-1)}{(2n-1)(n-1)} = \frac{n}{2n-1}\,.$$

Hay otra forma más corta, pero requiere algunos conocimientos sobre probabilidad condicionada e independencia de sucesos: sea E el suceso “las bolas son de distinto color”, y B el suceso “sale la bola que se pierde”, siendo B^c el suceso complementario, es decir “no sale la bola que se pierde”.

El argumento del principio equivale a afirmar que en la situación inicial $\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(E|B)$, lo que dice que los sucesos E y B son independientes, y eso equivale a que lo son los sucesos E y B^c, luego $\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(E|B^c)$. Pero $\mathrm{P}(E|B^c)$ es precisamente la probabilidad de sacar dos bolas de distinto color después de la pérdida.

83. a) A y B (se llaman así) juegan por turnos tirando a canasta, empezando A. Su probabilidad de acierto es p, y la de B es q ($0 < p, q < 1$, y no cambian con el cansancio por mucho que jueguen). Gana el primero que enceste. ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno?



P(GA) y P(GB) son respectivamente las probabilidades de ganar de A y B, que representamos como la probabilidad de que un camino aleatorio en el grafo del dibujo llegue a uno de dichos puntos, donde terminaría. Los valores $p, q, 1-p$ y $1-q$ son las probabilidades de tomar cada arco. El camino empieza en A. Notamos que, cada vez que estamos en un nodo, la probabilidad de que el camino desde ese sitio termine llegando a cualquier lado es la misma independientemente de la historia previa. Por tanto

$$\mathrm{P}(GA) = p + (1-p)(1-q)\ \mathrm{P}(GA)\,,$$
$$\mathrm{P}(GB) = (1-p)q + (1-p)(1-q)\ \mathrm{P}(GB)\,,$$

de donde $\mathrm{P}(GA) = \dfrac{p}{p+q-pq}$ y $\mathrm{P}(GB) = \dfrac{q-pq}{p+q-pq}$.

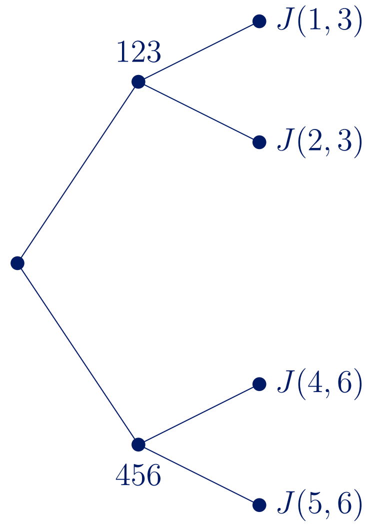
Notemos que las dos suman 1, luego la probabilidad de que nunca encesten (de que el camino no termine) es nula.

b) Queremos jugar al parchís pero no tenemos dados, aunque sí tenemos una moneda equilibrada. ¿Cómo podemos decidir, lanzando sucesivamente la moneda, un resultado entre $1, 2, 3, 4, 5$ y 6, todos con la misma probabilidad? Hay varias soluciones, pero se pide una en la que, a partir del tercero, todos los lanzamientos o bien deciden el resultado o bien obligan a lanzar otra vez.

En el juego anterior, si $p = q = 1/2$ podemos interpretar que A y B lanzan una moneda equilibrada y ganan si sale el resultado que deseen. Llamaremos al juego $J(A, B)$, indicando de esta forma que empieza A. En dicho juego

$$\mathrm{P}(GA) = \frac{1/2}{1-1/4} = \frac{2}{3}\,,\ \text{ y entonces }\ \mathrm{P}(GB) = \frac{1}{3}\,.$$

El producto de $1/4$ y $2/3$ es $1/6$. Podemos entonces emular el dado con lanzamientos de una moneda, con la condición reseñada, como indica el esquema siguiente (hacia arriba es cara y hacia abajo es cruz):



Por ejemplo, si en las dos primeras tiradas sacamos cruz y cara respectivamente, decidiríamos entre 4 y 6 según $J(4,6)$, o sea empezando 4; una forma de concretarlo sería que gana 4 si se repite el último lanzamiento, y si no el turno pasa a 6 con la misma regla.

Las probabilidades de 1, 2, 4, y 5 son 1/6 como hemos visto, y las de 3 y 6 también porque valen $1/4 \times (1/3 + 1/3)$.

84. Elegimos un elemento X_n de la lista $(1, 2, \ldots n)$, procediendo como sigue: un primer valor n_1 tomado al azar (quiere decirse que todos son equiprobables) hace que nos quedemos con la lista $(n, n-1, \ldots, n_1)$. Un segundo valor al azar entre los que quedan, n_2, nos deja la lista $(n_1, \ldots, n_2)$, y así sucesivamente (en cada paso rechazamos los anteriores al elegido e invertimos el orden). Terminamos cuando la lista es de un solo elemento, y ese es X_n.

¿Cuál es la probabilidad de que sea $X_n = n$?

Llamemos p_n y q_n, respectivamente, a las probabilidades de $X_n = n$ y $X_n = 1$. Comenzamos notando que $p_1 = q_1 = 1$. Para que pueda darse el segundo caso necesitamos que el primer valor tomado al azar sea 1, lo que sucede con probabilidad $1/n$, y entonces 1 pasa a estar en la posición inicial de n, luego

$$q_n = \frac{1}{n}\, p_n \,.$$

Por otro lado, p_n es la suma de las probabilidades de acabar obteniendo n empezando, como primera elección, con $1, 2, 3, \ldots, n$; para cada k entre ellos, la probabilidad es el producto de $1/n$ (la de que salga k al principio) y q_{n-k+1}. Reordenando adecuadamente resulta que

$$p_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} q_k \,, \qquad \text{es decir} \qquad p_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\, p_k \,.$$

Para los primeros valores de n comprobaríamos que $p_2 = 2/3$, $p_3 = 2/4$ y $p_4 = 2/5$, con lo que la conjetura natural es que

$$p_n = \frac{2}{n+1}\,,$$

y así es en efecto, como veremos por inducción completa:

La recurrencia anterior dice, restando el término $k = n$ del sumatorio en ambos lados y dando por cierto que $p_k = 2/(k+1)$ para cada $k < n$, que

$$\Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big) p_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\, p_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k(k+1)}\,.$$

El truco ahora es notar que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, luego

$$\begin{aligned} \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\, p_n &= \frac{1}{n}\, 2 \Big(\big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\big) + \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\big) + \cdots + \big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\big) \Big) \\ &= \frac{2}{n} \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\,, \end{aligned}$$

y finalmente $p_n = \dfrac{2}{n\big(1 + 1/n\big)} = \dfrac{2}{n+1}\,.$