Seminario de problemas Curso 2025-26. Hoja 10

91. Prueba que, si n es un número natural y n' es otro número que se obtiene permutando las cifras de n, entonces $|n - n'|$ no puede ser un número primo.

Solución.

Notemos que la suma de las cifras de ambos números es la misma, por lo que su diferencia es múltiplo de 9. Esto quiere decir que el número no puede ser primo.

92. a) Prueba que, si p es un primo mayor que 3, entonces $p^2 = 24n + 1$, para algún $n \geq 1$ entero.

b) Prueba que, si p y $p^2 + 2$ son primos, entonces $p^3 + 2$ también es primo.

Solución.

a) Al ser $p > 3$, entonces p es de la forma $6k + 1$ o $6k - 1$, con $k \geq 1$. Por lo tanto,

$$p^2 = (6k \pm 1)^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 = 12k(3k \pm 1) + 1.$$

Si k es par, entonces es evidente que p^2 es un múltiplo de 24 más 1. Si k es impar, entonces $3k \pm 1$ es par y también p^2 es un múltiplo de 24 más 1.

b) Es evidente que $p > 2$, pues si $p = 2$, $p^2 + 2$ no puede ser primo. Si $p = 3$, entonces, $p^2 + 2 = 11$ (primo) y $p^3 + 2 = 29$ también es primo. Ahora bien, para $p > 3$, por el apartado a), resulta que $p^2 + 2 = (24n + 1) + 2 = 3(8n + 1)$ para algún $n \geq 1$. Es decir, $p^2 + 2$ es múltiplo de 3 y, por tanto, nunca será primo. Luego, p y $p^2 + 2$ son primos al mismo tiempo solo si $p = 3$ y hemos concluido.

93. a) Prueba, completando cuadrados, la identidad de Sophie Germain

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy).$$

b) Prueba que $n^4 + 4^n$ no es un número primo, para todo $n > 1$ entero.

Solución.

a) Notemos que en la expresión $x^4 + 4y^4$ podemos completar el cuadrado de una suma o una diferencia, sumando y restando $4x^2y^2$. De este modo, resulta

$$x^4 + 4y^4 = x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2) - 4x^2y^2.$$

Ahora, tenemos una diferencia de cuadrados, por lo que llegamos a la identidad pedida sin más que factorizar

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy).$$

b) Lo primero que observamos es que, si n es un número par, $n^4 + 4^n$ es un número par mayor que 2 y, por tanto, no puede ser un número primo. Si n es impar, es de la forma $n = 2k + 1$, con $k > 1$. De este modo,

$$n^4 + 4^n = (2k + 1)^4 + 4^{2k+1} = (2k + 1)^4 + 4 \cdot 4^{2k} = (2k + 1)^4 + 4 \cdot 2^{4k}.$$

Ahora, obervamos que $2^{4k} = \left(2^k\right)^4$, por lo que, haciendo uso de la identidad de Sophie Germain,

$$(2k+1)^4 + 4 \cdot \left(2^k\right)^4 = ((2k+1)^2 + 2^{2k+1} + 2^{k+1}(2k+1))((2k+1)^2 + 2^{2k+1} - 2^{k+1}(2k+1)),$$

que, al ser producto de dos factores, no puede ser un número primo.

94. Prueba que $n^7 - n$ es divisible por 42, para todo n entero positivo.

Solución.

Notemos que $n^7 - n$ se puede factorizar, de manera que

$$n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n^3 - 1)(n^3 + 1) = n(n+1)(n-1)(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1).$$

Los tres primeros factores son el producto de tres números consecutivos, por lo que al menos uno es múltiplo de 3 y al menos otro múltiplo de 2. Por tanto, $n^7 - n$ es múltiplo de 6. Veamos, ahora, que también es múltiplo de 7. Esto es evidente si n es múltiplo de 7 o múltiplo de 7 más o menos 1. Para los otros casos, es decir cuando n es de la forma $7k \pm j$ con $j = 2, 3$, vamos a ver que uno de los dos factores finales de $n^7 - n$ es múltiplo de 7. Para ello, basta observar que

$$\begin{aligned}
(7k+2)^2 + (7k+2) + 1 &= 49k^2 + 21k + 7, \\
(7k-2)^2 - (7k-2) + 1 &= 49k^2 - 21k + 7, \\
(7k+3)^2 - (7k+3) + 1 &= 49k^2 + 35k + 7, \\
(7k-3)^2 + (7k-3) + 1 &= 49k^2 - 35k + 7,
\end{aligned}$$

que son múltiplos de 7.

95. Prueba que, para todo entero positivo n, se verifica que $\dfrac{(n+1)^n - 1}{n^2}$ es un número entero.

Solución.

Desarrollando el binomio $(n+1)^n$, resulta

$$(n+1)^n - 1 = \binom{n}{1} n + \binom{n}{2} n^2 + \cdots + \binom{n}{n} n^n.$$

Puesto que $\binom{n}{1} = n$, todos los sumandos son múltiplos de n^2 y, por lo tanto, el cociente es un número entero.

Otra forma de probarlo es factorizar $(n+1)^n - 1$, escribiéndolo como

$$(n+1)^n - 1 = n((n+1)^{n-1} + (n+1)^{n-2} + \cdots + (n+1) + 1).$$

Por tanto,

$$\frac{(n+1)^n - 1}{n^2} = \frac{(n+1)^{n-1} + (n+1)^{n-2} + \cdots + (n+1) + 1}{n},$$

que será un número entero si el numerador es divisible por n. Ahora bien, en el numerador hay n sumandos, cada uno de ellos dejando resto 1 al dividir por n, luego su suma dejará resto 0. Por lo tanto, concluimos que el cociente es un entero.

96. Prueba que existen infinitos números enteros positivos de la forma $4n^2+1$ que son divisibles por 5 y por 13.

Solución.

Basta encontrar uno de tales números, ya que, si $4n^2+1$ es divisible por 5 y 13, entonces $4(n+65)^2+1$ también lo será. En efecto,

$$4(n+65)^2+1 = 4n^2+1+8\cdot 65\cdot n+4\cdot 65^2.$$

Por hipótesis, $4n^2+1$ es múltiplo de 5 y 13, es decir de 65, y el resto de sumandos es evidente que son múltiplos de 65, por lo que $n+65$ es otro número que cumple la condición. Ahora bien, para $n=4$, resulta $4\cdot 4^2+1=65$, que es divisible por 5 y por 13, luego todos los números $n=4+65k$, con $k\geq 0$, verifican la propiedad.

97. Encuentra todos los primos que son, al mismo tiempo, suma de dos primos y diferencia de dos primos.

Solución.

Veamos que $p=5$ es el único primo que verifica las condiciones del enunciado. En efecto, sea p uno de tales primos. Es evidente que p tiene que ser impar, pues de otro modo p tendría que ser 2, que no se puede poner como suma de dos primos. Entonces, al ser p impar y suma de dos primos, uno de ellos tiene que ser necesariamente 2, por lo que $p+2$ y $p-2$ tienen que ser primos. Como $p-2$, p y $p+2$ son tres números impares consecutivos, al menos uno de ellos es múltiplo de 3. Por tanto, la única posibilidad es que $p-2=3$, $p=5$ y $p+2=7$.

98. Prueba que ningún número de la forma $8k+3$ o $8k+5$, con k un entero, puede escribirse como x^2-2y^2 con x, y enteros.

Solución.

Tanto $8k+3$ como $8k+5$ son números impares, por lo que si son iguales a x^2-2y^2, x necesariamente es impar. De aquí, se deduce que x^2 es congruente con 1 módulo 8 (deja resto 1 al dividir por 8). Por otra parte, si y es par, entonces $2y^2$ es congruente con 0 módulo 8 (es múltiplo de 8), mientras que si y es impar, $2y^2$ es congruente con 2 módulo 8 (deja resto 2 al dividir por 8). En cualquiera de los casos, x^2-2y^2 no es congruente ni con 3 ni con 5, por lo que ni $8k+3$ ni $8k+5$ se pueden escribir de la forma x^2-2y^2.

99. Prueba que, si x, y son enteros positivos tales que x^2+y^2-x es múltiplo de $2xy$, entonces x es un cuadrado perfecto.

Solución.

Por ser x^2+y^2-x múltiplo de $2xy$, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que

$$x^2+y^2-x = 2kxy.$$

De aquí, resulta $y^2 = x(1+2ky-x)$.

Consideremos ahora la descomposición en factores primos de x, $x=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$, y veamos que todos los exponentes son pares. Para ello, supongamos que uno de los exponentes no lo es, es decir, hay un factor de la forma p^{2j-1}, con $j\geq 1$. En este caso, por la relación

$$y^2 = x(1+2ky-x),$$

es evidente que p^{2j-1} divide a y^2. Pero, dado que y^2 es un cuadrado perfecto, y^2 debe ser múltiplo de p^{2j}. Con esto, vemos que p^{2j} divide a $x(1+2ky-x)$ y, entonces, p divide a $1+2ky-x$. Ahora bien, p divide tanto a x como a y, por lo que, si p divide a $1+2ky+x$, p divide a 1, lo cual es absurdo. Esto queiere decir que todos los exponentes en la descomposición en factores primos de x son pares y, por lo tanto, x es un cuadrado perfecto.

100. Encuentra, de manera razonada, el mínimo de $|12^m - 5^n|$, donde m y n son enteros positivos.

Solución.

Para $n, m = 1$, obtenemos $|12-5| = 7$, por lo que el mínimo es un número menor o igual que 7. Además, puesto que 5^n es impar y 12^m es par, el mínimo es un número entero impar menor o igual que 7. Es decir, el mínimo es 1, 3, 5 o 7.

Ahora bien, 5 no puede ser, ya que, en este caso, debería ser $12^m \equiv 0 \mod 5$, cosa que no es posible. Por otra parte, 3 tampoco puede ser, pues ahora, debería ser $5^n \equiv 0 \mod 3$, lo que tampoco puede ser. Así pues, el mínimo o es 7 o es 1.

Veamos que 1 tampoco puede ser. Si este fuera el caso, trabajando módulo 5, resultaría $12^m \equiv \pm 1 \mod 5$, lo que quiere decir que m es par. Si trabajamos módulo 12, entonces $5^n \equiv \pm 1 \mod 12$ y n debe ser también par. Así pues, $m = 2j$, $n = 2k$, por lo que

$$|12^m - 5^n| = |12^{2j} - 5^{2k}| = |(12^k - 5^j)(12^k + 5^j)| > 17|12^k - 5^j| \geq 17,$$

con lo cual, el mínimo no puede ser 1 y el mínimo es 7.