Seminario de problemas Curso 2023-24. Hoja 10

106. Don Retorcido, que ya va cumpliendo años, no recuerda la clave de desbloqueo de su teléfono. Sin embargo, ha encontrado un papel con algunas instrucciones. Son estas: su clave es un número $abcde$ de cinco cifras, ninguna de ellas nula. Además, los números ae, abe y $abde$ son muúltiplos de 11, pero $abcde$ no lo es. ¿Cuántos intentos debe hacer Don Retorcido para encontrar seguro su clave?

Solución

Como ae es múltiplo de 11, $a = e$, por lo que hay 9 elecciones para a.

Como $abe = aba$ es múltiplo de 11, tenemos que $2a-b$ es múltiplo de 11. Es decir, $b = 2a-11k$, con k un número entero. Si $a = 5$, la ecuación anterior no tiene solución que dé lugar a un valor de b entre 1 y 9, pues b es una de las cifras del número. Sin embrago, cuando $a \neq 5$, siempre podemos encontrar $1 \leq b \leq 9$ y k entero, tal que $b = 2a - 11k$. Hay, por tanto, 8 elecciones posibles para a, de cada una de las cuales se sigue una única terna a, b, e.

Como 11 divide a $abde = abda$, resulta que $(a + b) - (a + d) = b - d$ es múltiplo de 11, luego $b = d$.

Por último, $abcde = abcba$ no es múltiplo de 11, por lo que $2a + c - 2b = (2a - b) + (c - b)$ no es múltiplo de 11. Pero, recordemos que $2a - b$ es múltiplo de 11, por lo que $c - b$ no podrá serlo y, entonces $c \neq b$. Como no hay cifras nulas, esto da 8 posibles elecciones para c. Así, en total, el número de intentos que debe hacer Don Retorcido es $8 \cdot 8 = 64$.

107. Tres personas se preparan para la olimpiada intentando resolver una lista de 100 problemas. Cada persona resuelve exactamente 60 problemas. Decimos que un problema es "fácil" si las tres lo resuelven, y que es "difícil" si lo resuelve únicamente una de las tres. Sabiendo que cada problema fue resuelto por alguien, calcula la diferencia entre el número de problemas difíciles y el número de problemas fáciles.

Solución

Sean f y d el número de problemas fáciles y difíciles, respectivamente, y sea m el número de problemas intermedios (resueltos por dos personas exactamente). Dado que hay 100 problemas, sabemos que

$$f + m + d = 100.$$

Por otra parte, si contamos cada problema cada vez que alguien lo resuleve, obtenemos

$$3f + 2m + d = 3 \cdot 60 = 180.$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y restando la segunda, obtenemos $d - f = 20$.

108. Tenemos una baraja de 30 cartas, numeradas con los números del 1 al 30. Después de barajar, sacamos una carta elegida al azar. A continuación, volvemos a barajar las 29 cartas restantes y sacamos una segunda carta, también al azar. De nuevo, con las 28 restantes repetimos el proceso, es decir, barajamos y sacamos una carta. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de esta tercera carta sea mayor que el de las dos cartas extraídas anteriormente?

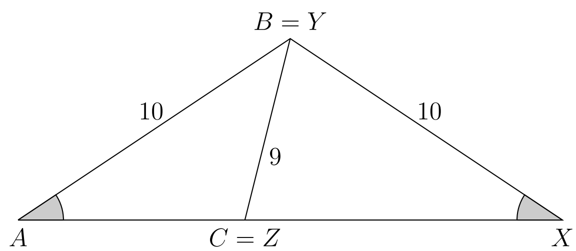
Solución

Observemos que los diferentes barajeos no son esenciales. Realmente, lo que estamos haciendo es escoger 3 cartas al azar de entre 30 posibles. Como estas tres cartas están elegidas completamente al azar, pueden estar ordenadas de cualquier forma posible, y todas las formas son igualmente probables. En concreto, es igual de probable que la primera sea la mayor, que lo sea la segunda, y lo mismo pasa con la tercera. Todas estas probabilidades suman 1 (alguna ha de ser la más grande) y como todas son igual de probables, todas valen $1/3$. Es decir, la probabilidad de que la tercera sea la mayor es $1/3$.

109. Los triángulos ΔABC y ΔXYZ verifican $AB = XY = 10$ y $BC = YZ = 9$, pero el lado CA no mide lo mismo que el lado ZX. Además, $\angle ZXY = \angle CAB = 30°$. Calcula el valor de la suma de las áreas de ambos triángulos.

Solución

Pongamos los triángulos identificando los lados BC e YZ como se muestra en la figura.



Ambos triángulos tienen iguales dos lados y un ángulo. Como no son iguales, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que ΔABC es obtusángulo con ángulo obtuso en C, mientras que el ángulo en Z de ΔXYZ es agudo. El teorema de los senos nos permite asegurar que

$$\angle C + \angle Z = 180°.$$

Por lo tanto, los puntos X, Z, A están alineados. Los dos triángulos juntos forman entonces un nuevo triángulo, ΔABX, en el que

$$\angle BAX = \angle BXA = 30°$$

y $BX = AB = 10$. Entonces,

$$\text{área}(ABC) + \text{área}(XYZ) = \text{área}(ABX) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \operatorname{sen} 120° = \frac{5 \cdot 10 \cdot \sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}.$$

110. Diremos que un entero positivo n es especial si para todo divisor d de n se verifica que uno de los números $d-1$ o $d+1$ es primo. Por ejemplo, 8 es especial porque sus divisores son 1, 2, 4, 8 y los números 2, 3, 3 (o 5) y 7 son primos. En cambio, 9 no lo es, pues 9 divide a 9 y tanto 8 como 10 son compuestos. Determinar el mayor entero especial.

Solución

Observemos que si un impar $d \geq 5$ es divisor de n, tanto $d-1$ como $d+1$ serán pares mayores que 2, compuestos, y por lo tanto n no será especial. Resulta entonces que si n es especial, debe ser del tipo $n = 2^k \cdot 3$. Tanto 2 como $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ y $2^5 = 32$ son especiales, pero $2^6 = 64$ no lo es, ya que $63 = 64 - 1$ ni $65 = 64 + 1$ son primos. Por tanto, todos los múltiplos de 2^6 tampoco serán especiales. Así que el mayor entero n especial es $n = 2^5 \cdot 3 = 96$. En efecto, sus doce divisores son 1, 2, 4, 8, 16, 32, 3, 6, 12, 24, 48 y 96 y cada uno de ellos tiene algún primo adyacente: 2, 3, 5, 7, 17, 31, 2, 7, 13, 23, 47 y 97.

111. Sean a, b, c enteros mayores o iguales que 1. Con cubitos blancos, todos iguales de lado 1, Marta construye un prisma de dimensiones $a \times b \times c$; una vez terminado, lo pinta de rojo. Cuando el prisma se deshace, Marta observa que el número de caras rojas es el mismo que el de caras blancas. ¿Cuáles son todos los valores posibles del producto abc?

Solución

Sin pérdida de generalidad, suponemos $a \leq b \leq c$. El número total de caras (de todos los cubitos) es $6abc$, y el número de caras rojas es $2(ab + bc + ca)$. Como hay tantas caras rojas como blancas, tendremos

$$2(ab + bc + ca) = 3abc.$$

Distinguimos ahora varios casos, según el valor de a.

Si $a = 1$, entonces

$$2(b + c + bc) = 3bc \Rightarrow bc - 2b - 2c = 0.$$

Sumando 4 a ambos lados de la igualdad y factorizando, se tiene

$$(b - 2)(c - 2) = 4.$$

Los divisores de 4 son 1, 2 y 4. Considerando todas las posibilidades y teniendo en cuenta que $b \leq c$, obtenemos las soluciones $(1, 3, 6)$ y $(1, 4, 4)$, que nos dan para el producto abc los valores 18 y 16.

Si $a = 2$, tenemos $bc - b - c = 0$. Sumando 1 a ambos lados de la igualdad y factorizando, resulta $(b - 1)(c - 1) = 1$, que proporciona la solución válida $(2, 2, 2)$, en la que el producto abc es 8.

Finalmente, si $a \geq 3$, tendremos $2(ab + bc + ca) = 3abc \geq 9bc > 2ab + abc + 2ca$, que es imposible. Nótese que la última desigualdad proviene de la suposición $a \leq b \leq c$, de donde resulta

$$9bc > 6bc = 2bc + 2bc + 2bc \geq 2ab + 2bc + 2ca.$$

En consecuencia solo hay tres posibles valores para el producto abc que son 8, 16 y 18.

Otra solución alternativa es la siguiente. Como antes, suponemos $0 < a \leq b \leq c$, con lo que

$$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}.$$

De la igualdad $2(ab + bc + ca) = 3abc$, dividiendo por $2abc$ se obtiene

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{2} \leq \frac{3}{a} \Leftrightarrow a \leq 2.$$

Si $a = 2$, hay igualdad y $a = b = c = 2$, por lo que $abc = 8$. Si $a = 1$, entonces

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{2} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{2}{b} \Leftrightarrow 2 < b \leq 4.$$

Los posibles valores de b son entonces 3 y 4, por lo que tenemos las soluciones $(1, 3, 6)$ y $(1, 4, 4)$, con productos 18 y 16. Así, Estos valores junto con el producto 8, obtenido en el caso $a = 2$, nos dan los tres posibles productos.

112. Los tres lados de cierto triángulo son $a > b > 20$, con a, b enteros. Sea h la medida de la altura correspondiente al lado menor y sean h_a y h_b las medidas de las alturas correspondientes a los lados de medidas a y b respectivamente. Sabiendo que $h = h_a + h_b$, determina el perímtero del triángulo.

Solución

Si S es el área del triángulo, entonces

$$S = \frac{1}{2}20 \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b.$$

De las igualdades anteriores, y teniendo en cuenta que $h = h_a + h_b$, se obtiene

$$\frac{2S}{20} = h = h_a + h_b = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b}.$$

Dividiendo por S, resulta

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow 20(a+b) = ab \Rightarrow ab - 20(a+b) = 0.$$

Sumando 20^2 en los lados de la igualdad, podemos factorizar para obtener

$$(a-20)(b-20) = 20^2.$$

Como $a > b$, el primer factor es mayor que el segundo y, entonces, $a - 20 > \sqrt{20^2} = 20$, mientras que $b - 20 < 20$. Es decir $a > 40$, mientras que $b < 40$. Como a, b y 20 son los tres lados de un triángulo, se tiene que cumplir la desigualdad triangular, de modo que $a < b + 20$ o, lo que es lo mismo, $a - 20 < b$. Con lo anterior, obtenemos la cadena de desigualdades

$$20 < a - 20 < b < 40.$$

La única posibilidad para expresar entonces $(a-20)(b-20) = 20^2$ es $a - 20 = 25$, $b - 20 = 16$, es decir $a = 45$, $b = 36$ y el perímetro es $45 + 36 + 20 = 101$.

113. Encontrar todos los enteros no negativos a, b que son soluciones de la ecuación

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 1.$$

Solución

Supondremos, sin pérdida de generalidad, $a \geq b$ ya que, si (a, b) es una solución, por la simetría, también (b, a) es solución.

La ecuación dada es equivalente a

$$a + b - 2\sqrt{ab} = 2 \Rightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = 2.$$

Por tanto, al ser $a \geq b$, resulta $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{2}$, es decir, $\sqrt{a} = \sqrt{2} + \sqrt{b}$. elevando al cuadrado, se tiene

$$a = 2 + 2\sqrt{2b} + b \Rightarrow 2\sqrt{2b} = a - b - 2.$$

Puesto que $a - b - 2$ es un entero, $2b$ tiene que ser un cuadrado perfecto y $b = 2n^2$, con $n \geq 0$. Como $a = 2 + 2\sqrt{2b} + b$, resulta $a = 2(n+1)^2$. Puede verse que estos valores satisfacen la ecuación original. En efecto

$$\frac{2(n+1)^2 + 2n^2}{2} - \sqrt{2(n+1)^2 2n^2} = (n+1)^2 + n^2 - 2n(n+1) = 1.$$

114. Sean a, b y c tres números enteros positivos en progresión aritmética tales que $a < b < c$, y sea $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dos números reales distintos r y s satisfacen $f(r) = s$ y $f(s) = r$. Si $rs = 2023$, determina el menor valor posible de a.

Solución

Tenemos que $ar^2 + br + c = s$ y $as^2 + bs + c = r$. Restando las ecuaciones, obtenemos

$$a(r+s)(r-s) + b(r-s) = -(r-s).$$

Dao que $r \neq s$, deducimos que $a(r+s) + b = -1$, por lo que

$$r + s = -\frac{b+1}{a}.$$

Por otra parte, sumando las ecuaciones, obtenemos

$$a((r+s)^2 - 2rs) + b(r+s) + 2c = r + s.$$

Sustituyendo el valor de $r + s$ y sabiendo que $rs = 2023$, se tiene

$$a\left(\left(-\frac{b+1}{a}\right)^2 - 4046\right) + b\left(-\frac{b+1}{a}\right) + 2c = -\frac{b+1}{a}.$$

Multiplicando por a y simplificando, tenemos que

$$b + 1 + ac - 2023a^2 = 0.$$

Como a, b, c están en progresión aritmética, $b - a = c - b$, por lo que $c = 2b - a$ y la ecuación anterior queda como

$$b + 1 + a(2b - a) - 2023a^2 = 0.$$

Despejando b se obtiene

$$b = \frac{2024a^2 - 1}{2a + 1} = 1012a - 506 + \frac{505}{2a+1}.$$

Dado que a y b son enteros positivos, $2a + 1$ tiene que dividir a 505. El menor número que cumple este es 2. De aquí se deduce que $b = 1619$ y $c = 3236$. Por último, falta comprobar que, para estos valores, r y s son números reales y distintos. Como $r + s = -(b+1)/a$, resulta que $r + s = -810$ y, como $rs = 2023$, r y s son solución de la ecuación de segundo grado

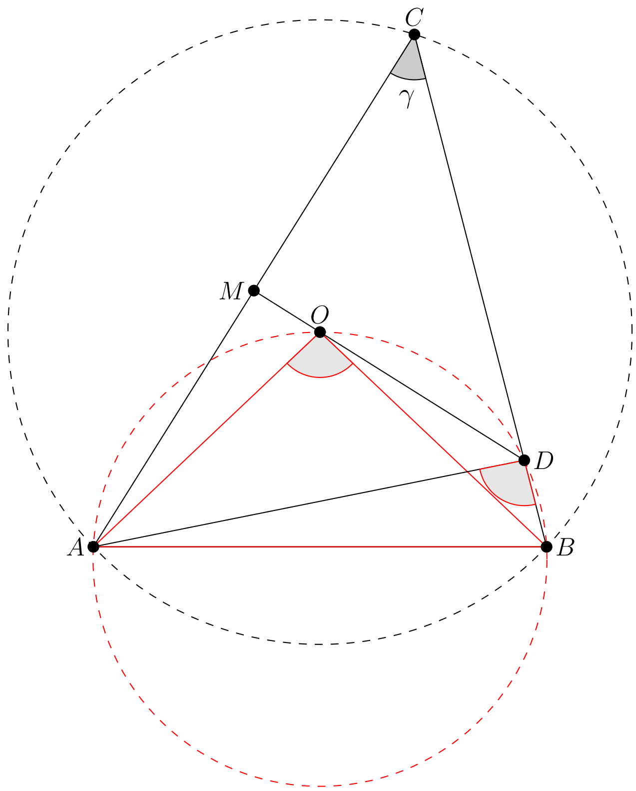
$$x^2 + 810x + 2023 = 0.$$

Las dos raíces son reales y distintas si el discriminante de la ecuación es mayor que 0, esto es, si $810^2 - 4 \cdot 2023 > 0$. Como esta última desigualdad es cierta, r y s son reales y distintos.

115. Los lados de cierto triángulo ΔABC son $AB = 6$, $BC = 7$ y $AC = 8$ y el centro de la circunferencia circunscrita es O. Se sabe que la circunferencia circunscrita al triángulo OAB corta al lado BC en el punto D, distinto de B. ¿Cuánto mide el segmento BD?

Solución

Llamamos Γ a la circunferencia circunscrita al triángulo ΔABC, de centro O, y Ω a la circunferencia circunscrita a ΔABD. Como $\gamma = \angle ACB$ está inscrito en Γ y abarca la cuerda AB, el ángulo central $\angle AOB$ será dos veces γ, es decir $\angle AOB = 2\gamma$ (ver figura).



En Ω, $\angle AOB = \angle ADB = 2\gamma$, pues ambos abarcan la misma cuerda AB. Además, $\angle ADB$ es exterior al triángulo ΔACD, por lo que

$$2\gamma = \gamma + \angle DAC \;\Rightarrow\; \angle DAC = \gamma,$$

de modo que ΔACD es isósceles con $DC = DA$.

Sea M el punto medio de AC. Como ΔADC es isósceles, el segmento DM es mediatriz y ΔDMC es rectángulo en M. Por tanto,

$$\cos\gamma = \frac{CM}{CD} = \frac{4}{7-x},$$

siendo $x = BD$. Por otra parte, por el teorema del coseno en ΔABC obtenemos que

$$\cos\gamma = \frac{8^2 + 7^4 - 6^2}{2\cdot 7\cdot 8} = \frac{11}{16}.$$

Igualando las dos expresiones para $\cos\gamma$, obtenemos

$$\frac{4}{7-x} = \frac{11}{16} \;\Rightarrow\; 7 - x = \frac{64}{11} \;\Rightarrow\; x = \frac{13}{11}.$$