# Seminario de problemas. Curso 2021-22. Hoja 10

**90.** Sean $x, y, z$ tres números reales no nulos tales que

$$\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = 3.$$

Calcula $(x+y+z)^3$.

*Solución.*

Notemos que la igualdad primera se puede escribir como

$$\frac{x^3}{xyz} + \frac{y^3}{xyz} + \frac{z^3}{xyz} = 3 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0.$$

Agrupando convenientemente se tiene

$$x(x^2 - yz) + y(y^2 - xz) + z(z^2 - xy) = 0,$$

que podemos reescribir como

$$\begin{aligned} &x(x^2 - yz + y^2 - xz + z^2 - xy - y^2 + xz - z^2 + xy) + \\ &y(x^2 - yz + y^2 - xz + z^2 - xy - x^2 + yz - z^2 + xy) + \\ &z(x^2 - yz + y^2 - xz + z^2 - xy - x^2 + yz - y^2 + xz) = 0. \end{aligned}$$

No es difícil ver que lo anterior es igual a

$$(x+y+z)(x^2 - yz + y^2 - xz + z^2 - xy) = 0.$$

Por tanto o bien $x+y+z=0$ y, entonces, $(x+y+z)^3 = 0$, o bien

$$x^2 - yz + y^2 - xz + z^2 - xy = 0.$$

En este caso, tenemos

$$x^2 - yz + y^2 - xz + z^2 - xy = \left(x - \frac{1}{2}(y+z)\right)^2 + \frac{3}{4}(y-z)^2 = 0$$

cuya solución es $x = y = z$. Entonces, la ecuación inicial se cumple trivialmente y $(x+y+z)^3 = 27x^3$ puede tomar cualquier valor.

**91.** Encuentra todas las posibles parejas $(x, y)$ de números enteros no nulos tales que

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2.$$

*Solución.*

Tratemos de buscar una forma factorizada de la misma ecuación. Para ello, empezamos por desarrollar el cuadrado

$$x^2y^2 - 14xy + 49 = x^2 + y^2.$$

Aquí, completamos el cuadrado en la segunda parte de la ecuación, quedando

$$x^2y^2 - 12xy + 49 = x^2 + y^2 + 2xy,$$

que podemos escribir como

$$(xy-6)^2 + 13 = (x+y)^2 \Rightarrow (xy-6)^2 - (x+y)^2 = -13.$$

Como el primer miembro es una diferencia de cuadrados puede factorizarse y llegamos a

$$(xy - x - y - 6)(xy + x + y - 6) = -13.$$

Las posibles soluciones van a ser las que se obtienen de las descomposiciones de $-13$ en producto de dos enteros, que son 4:

$$a)\,(-1)\cdot 13, \quad b)\,1\cdot(-13), \quad c)\,-13\cdot 1, \quad d)\,13\cdot(-1).$$

Analicemos cada una de ellas.

a) $xy-x-y-6=-1$, $xy+x+y-6=13$. Sumando las ecuaciones resulta $xy=12$ y, restando las ecuaciones, $x+y=7$. De aquí se obtienen las soluciones $x=3, y=4$, $x=4, y=3$.

b) $xy-x-y-6=1$, $xy+x+y-6=-13$. Procediendo como antes, sumando y restando las ecuaciones, se obtiene $x=0, y=-7$, $x=-7, y=0$.

c) $xy-x-y-6=-13$, $xy+x+y-6=1$. Se obtienen las soluciones $x=0, y=7$, $x=7, y=0$.

b) $xy-x-y-6=13$, $xy+x+y-6=-1$. Las soluciones, en este caso, son $x=-3, y=-4$, $x=-4, y=-3$.

Obsérvese la simetría de las soluciones, que podríamos haber deducido desde el principio, ya que si $(x,y)$ es una solución, también lo son $(y,x)$ y $(-x,-y)$.

**92.** Sea $x$ un número real no nulo. Calcula

$$\frac{\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\cdots}}}}{\sqrt{x^2+x\sqrt{x^2+x\sqrt{x^2+\cdots}}}}.$$

*Solución.*

Consideremos de manera separada el numerador y el denominador. Para el numerador tenemos

$$\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\cdots}}} = \left(x^2\left(x^2\left(x^2\cdots\right)^{1/3}\right)^{1/3}\right)^{1/3} = x^{2/3}\left(x^2\left(x^2\cdots\right)^{1/3}\right)^{1/9}.$$

Siguiendo el desarrollo, se llega a

$$\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\cdots}}} = x^{2/3}x^{2/9}(x^2\cdots)^{1/27} = x^{2/3}x^{2/9}x^{2/27}\cdots = x^{2/3+2/9+2/27+\cdots+2/3^n+\cdots}$$

El exponente de $x$ es la suma de una serie geométrica de razón $1/3$. Si sumamos hasta el término $n$-ésimo de la serie, resulta

$$S_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}.$$

Si $n$ tiende a infinito, entonces $S_n$ tiende a 1 y el numerador de la fracción tiende a $x$.

Si analizamos ahora el denominador y éste converge a un valor $a$, entonces

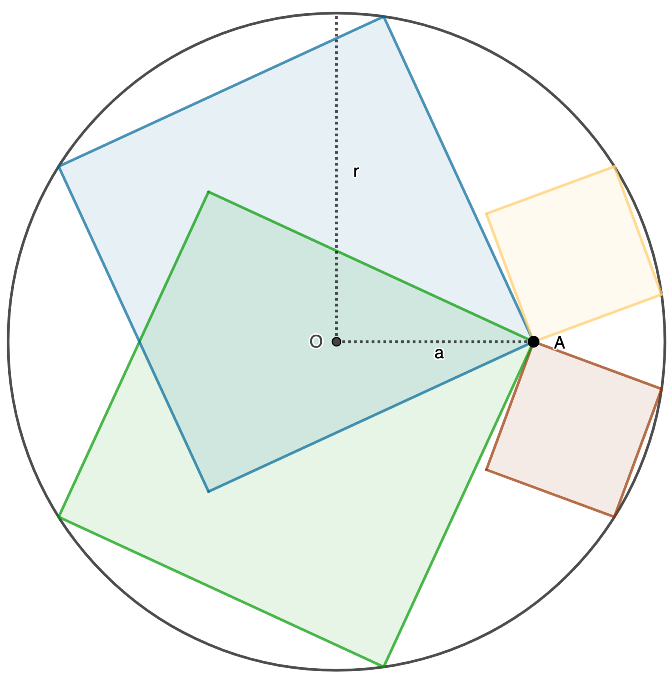
$$a = \sqrt{x^2 + x\sqrt{x^2 + x\sqrt{x^2 + \cdots}}} = \sqrt{x^2 + ax} \Rightarrow a^2 - ax - x^2 = 0 \to a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}x.$$

El signo menos hay que descartarlo, ya que $a > 0$ y, entonces, la expresión que buscamos es igual a $\frac{2}{1+\sqrt{5}} = 1/\phi$, siendo $\phi$ el número áureo.

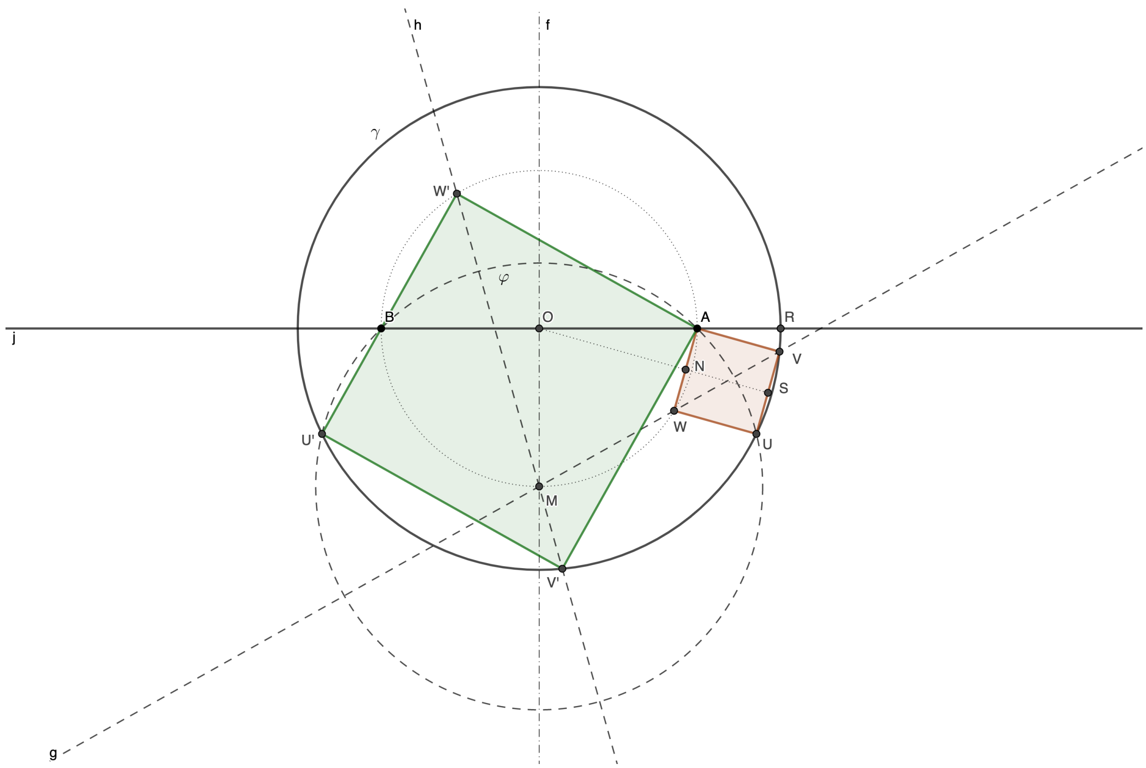
**93.** Sea una circunferencia $\gamma$ de centro de $O$ y radio $r$ y consideremos un punto $A$ interior a la circunferencia a una distancia $a$ del centro. Si $a$ cumple una cierta condición, entonces existirán cuatro cuadrados con un vértice en $A$ y dos vértices sobre la circunferencia. Se pide:

a. La condición que debe cumplir $a$.

b. El área de cada cuadrado en función de $a$ y $r$.




*Solución.* Veamos, en primer lugar, cómo se construyen con regla y compás los cuatro cuadrados que intervienen en el problema. Sea $B$ el punto simétrico de $A$ respecto de $O$, y trazamos el arco capaz $\varphi$ de ángulo $45°$ del segmento $AB$; el centro de este arco capaz lo denotamos $M$. Los dos puntos de corte $U$ y $U'$ del este arco capaz $\varphi$ con la circunferencia $\gamma$ son vértices, respectivamente, del cuadrado pequeño (rojo) y grande (verde). Los cortes de las mediatrices de los segmentos $AU$ y $AU'$ con la circunferencia $\gamma$ son los puntos $V$ y $V'$, respectivamente. El último vértice de cada respectivo cuadrado es el simétrico de $V$ respecto al segmento $AU$, obteniendo $W$, y el simétrico de $V'$ respecto de $AU'$. De esta forma obtenemos los cuadrados $AVUW$ y $AV'U'W'$. Los otros dos cuadrados obtienen por un argumento de simetría con éstos.




Procedamos ahora a resolver el problema en cuestión. Sea $R$ el punto de corte de la circunferencia con la prolongación del segmento $OA$ y $S$ el punto medio del lado $UV$. Por el teorema de Pitágoras tenemos la igualdad

$$OS^2 + SU^2 = OR^2 \iff (ON + NS)^2 + SU^2 = OR^2,$$

donde $N$ es el punto medio del lado $AW$. De nuevo por el teorema de Pitágoras,

$$(\sqrt{OA^2 - AN^2} + NS)^2 + SU^2 = OR^2 \iff (\sqrt{OA^2 - AN^2} + 2AN)^2 + An^2 = OR^2,$$

donde hemos usado que $SU = AN$ primero, y $NS = 2AN$ después. Dado que $OA = a$ y $OR = r$, tomamos $AN = x$ (notar que $x$ es el semilado del cuadrado). De este modo obtenemos la ecuación

$$(\sqrt{a^2 - x^2} + 2x)^2 + x^2 = r^2 \iff 4x\sqrt{a^2 - x^2} = r^2 - a^2 - 4x^2.$$

De aquí, elevando al cuadrado y simplificando llegamos a la ecuación bicuadrada

$$32x^4 - 8(r^2 + a^2)x^2 + (r^2 - a^2)^2 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$x_1^2 = \frac{1}{8}\left(r^2 + a^2 + \sqrt{6r^2a^2 - r^4 - a^4}\right) \quad \text{y} \quad x_2^2 = \frac{1}{8}\left(r^2 + a^2 - \sqrt{6r^2a^2 - r^4 - a^4}\right)$$

para el cuadrado mayor (verde) y el menor (rojo), respectivamente.[1] Por tanto, las áreas buscadas son

$$4x_1^2 = \frac{1}{2}\left(r^2 + a^2 + \sqrt{6r^2a^2 - r^4 - a^4}\right) \quad \text{y} \quad 4x_2^2 = \frac{1}{2}\left(r^2 + a^2 - \sqrt{6r^2a^2 - r^4 - a^4}\right).$$

Queda pendiente la cuestión de cuál es la condición que debe cumplir el parámetro $a$. Dado que el área depende de la raíz $\sqrt{6r^2a^2 - r^4 - a^4}$, qué únicamente tiene sentido si su radicando es mayor o igual que 0. Es decir,

$$6r^2a^2 - r^4 \geq 0 \iff 0 \geq \left(\frac{a}{r}\right)^4 - 6\left(\frac{a}{r}\right)^2 + 1 = \left(\frac{a^2}{r^2} - (3+2\sqrt{2})\right)\left(\frac{a^2}{r^2} - (3-2\sqrt{2})\right).$$

La anterior desigualdad se cumple únicamente si

$$3 - 2\sqrt{2} \leq \frac{a^2}{r^2} \leq 3 + 2\sqrt{2},$$

pero como $a^2/r^2 < 1$, entonces

$$3 - 2\sqrt{2} \leq \frac{a^2}{r^2} < 1 \iff r\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \leq a < r.$$

**94.** Sea $x$ la solución de la ecuación $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$. Calcula

$$x^{2022} + \frac{1}{x^{2022}}.$$

*Solución.* Elevando al cuadrado la igualda que nos dan, se tiene

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 3 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 1.$$

Esta igualdad es equivalente a $x^4 + 1 = x^2$. Si multiplicamos ahora por $x^2$, y usando esta misma identidad, resulta

$$x^6 + x^2 = x^4 \rightarrow x^6 = -1.$$

Como $2022 = 6 \cdot 337$, se tiene

$$x^{2022} = \left(x^6\right)^{337} = (-1)^{337} = -1$$

y, entonces

$$x^{2022} + \frac{1}{x^{2022}} = -1 + \frac{1}{-1} = -2.$$

[1]Utilizando un argumento totalmente análogo para el cuadrado mayor, se llega a la ecuación

$$(2x - \sqrt{a^2 - x^2})^2 + x^2 = r^2 \iff 4x\sqrt{a^2 - x^2} = 4x^2 + a^2 - r^2.$$

Elevando al cuadrado obtenemos

$$32x^4 - 8(r^2 + a^2)x^2 + (a^2 - r^2)^2 = 0,$$

cuyas soluciones son, precisamente, $x_1^2$ y $x_2^2$.

**95.** Los números $1,\ 2,\ \ldots,\ 2n$ se dividen arbitrariamente en dos grupos de $n$ números. Sean $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ los números del primer grupo y $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$ los del segundo. Prueba que

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| = n^2.$$

*Solución.*

La identidad que se pide probar se denomina identidad de Proizvolov ya que, al parecer, fue propuesta por Vyacheslav Proizvolov en las olimpiadas matemáticas de la Unión Soviética de 1985. Veamos que es cierta, por ejemplo, para el caso $n = 3$. Para ello dividimos de manera arbitraria los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 en dos grupos de 3 números cada uno, en el primero ordenados de menor a mayor y en el segundo de mayor a menor: $A_3 = \{2, 4, 5\}$ y $B_3 = \{6, 3, 1\}$. De este modo

$$|2 - 6| + |4 - 3| + |5 - 2| = 5 + 1 + 3 = 9 = 32.$$

Cualquier otra elección de los grupos $A_3$ y $B_3$ también cumple la identidad. Por ejemplo, para $A_3 = \{1, 4, 5\}$ y $B_3 = \{6, 3, 2\}$,

$$|1 - 6| + |4 - 3| + |5 - 2| = 5 + 1 + 3 = 9 = 32.$$

Probemos la identidad en el contexto general. Dividimos el conjunto $1,\ 2,\ \ldots,\ 2n$ en los dos grupos de $n$ elementos $A_n = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}$ y $B_n = \{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n\}$, con $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ y $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. Ahora, para cada pareja $(a_i, b_i)$, veamos qué ocurre con $|a_i - b_i|$.

En primer lugar tenemos que en cada pareja $(a_i, b_i)$, exactamente uno de los elementos que la forman está en la primera mitad de los números dados $N = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ y el otro en la segunda mitad $M = \{n + 1,\ n + 2,\ \ldots,\ 2n\}$. ¿Por qué? Procedamos por reducción al absurdo, y supongamos que tanto $a_i$ como $b_i$ están en la primera mitad $N$. Si $a_i$ está en $N$, entonces $a_{i-1}$ también está en $N$, debido a que $a_{i-1} < a_i$; y de igual modo, llegamos a que $a_1, \ldots, a_i$ están en $N$. Por otra parte, si $b_i$ está en la primera mitad $N$, entonces $b_{i+1}$ también está en $N$ debido a que $b_i > b_{i+1}$; y de igual modo llegamos a que $b_{i+1}, \ldots, b_n$ también están en $N$. Tal vez hayamos metido demasiados elementos en $N$. $N$ es la primera mitad de los números dados y por tanto tiene $n$ elementos, pero hemos dicho que $a_1, \ldots, a_i, b_i, \ldots, b_n$, que son $i + (n - i + 1) = n + 1$ elementos, están en $N$. Esto es absurdo y, por tanto, $a_i$ y $b_i$ no pueden estar a la vez en $N$. De un modo análogo se comprueba que $a_i$ y $b_i$ no pueden estar a la vez en $M$. Luego exactamente uno de ellos está en $N$ y el otro en $M$. Por otra parte cada término $|a_i - b_i|$ es la diferencia entre el mayor y el menor de cada pareja $(a_i, b_i)$. Como hay $n$ parejas y en cada una hay exactamente un número del conjunto $N$ y otro del conjunto $M$, entonces

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| = 2n + (2n - 1) + \cdots + (n + 1) - (n + (n - 1) + \cdots + 2 + 1).$$

¿Cómo se resta esto? Hay varias maneras de proceder, pero quizás la más directa es haciendo la reordenación

$$(2n - n) + (2n - 1 - (n - 1)) + \cdots + (n + 1 - 1) = \underbrace{n + \cdots + n}_{n \text{ veces}} = n^2.$$