Seminario de problemas Curso 2021-22. Hoja 10

69. Sea a el primer dígito (empezando por la izquierda) de un número de tres dígitos que denotamos n. Construimos otro número de tres dígitos, m, trasladando el dígito a a la derecha de las unidades. Por ejemplo, si $n = 123$, entonces $m = 231$. Encuentra los números n que cumplen $m = an$.

Solución. Escribimos n de la forma $n = abc = a10^2 + b10 + c$, con $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b, c \leq 9$. Entonces $m = bca = b10^2 + c10 + a$. La condición $m = an$ se transforma en la ecuación

$$100b + 10c + a = a(100a + 10b + c) \Rightarrow (100 - 10a)b + (10 - a)c = a(100a - 1).$$

Sacando factor común $10 - a \neq 0$ y despejando llegamos a la igualdad

$$10b + c = \frac{a(100a - 1)}{10 - a}.$$

Notemos que $10b + c \leq 99$. Analizamos los valores del cociente que aparece en el lado derecho de la igualdad anterior para $1 \leq a \leq 9$. Dicho cociente es mayor que 100 si $a \geq 3$. En efecto, en este caso, $1/(10 - a) \geq 1/7$ y, por tanto,

$$\frac{a(100a - 1)}{10 - a} \geq \frac{3 \cdot 299}{7} > 100.$$

Además, si $a = 2$, el cociente es $199/4$ que no es un número entero y no puede coincidir con $10b + c$, que sí es entero.

La única solución posible se puede dar para el caso $a = 1$: $10b + c = 11$, por lo que $b = c = 1$. El único número que cumple la condición pedida es $n = 111$.

70. Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida como sigue: $f(x, y) = x + yf(y, x)$. Encuentra el valor de $f(2022, -1)$.

Solución. Podemos encontrar la forma explícita de la función $f(x, y)$ sin más que despejar después del siguiente proceso:

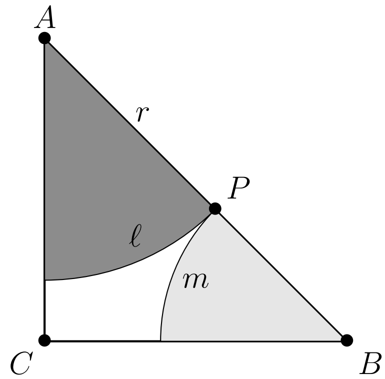
$$f(x, y) = x + yf(y, x) = x + y\big(y + xf(x, y)\big) \Rightarrow (1 - xy)f(x, y) = x + y^2.$$

Entonces, si $xy \neq 1$, $f(x, y) = \dfrac{x + y^2}{1 - xy}$. Como caso particular,

$$f(2022, -1) = \frac{2023}{2023} = 1.$$

71. Tenemos un triángulo rectángulo isósceles ABC, con el ángulo recto en C y los catetos de longitud 2 centímetros. Un arco de círculo ℓ con centro A divide al triángulo en dos partes de igual área. Otro arco de círculo m con centro en B es tangente al arco ℓ en un punto de la hipotenusa AB. Halla el área de la porción de triángulo no cubierta por los sectores circulares correspondientes a los dos arcos.

Solución.



Sea r el radio del círculo centrado en A y dado por el arco ℓ (distancia $|AP|$ en la figura adjunta). El área del sector dado por el arco ℓ (coloreado en un tono más oscuro) es, por tanto, $\pi r^2/8\, cm^2$. Esta cantidad, por hipótesis, vale $1\, cm^2$ (mitad del área del triángulo ABC). De aquí se deduce que

$$r = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, cm.$$

Por tanto, el radio del círculo centrado en B y dado por el arco m (el más claro en la figura) es

$$|AB| - r = 2\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)\, cm.$$

En consecuencia, el área pedida (en blanco en la figura anterior) es:

$$2 - 1 - \frac{\pi}{8}(|AB| - r)^2 = 2\sqrt{\pi} - \pi \approx 0.403315\, cm^2.$$

72. En el cuadro de números siguiente

$$\begin{array}{cccccccc}
0 \\
1 & 2 & 3 \\
4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\
16 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

encuentra el número que aparece justo debajo de 2022.

Solución. Notemos que cada fila empieza por un cuadrado perfecto. Además,

$$44^2 = 1936 < 2022 < 45^2 = 2025.$$

La diferencia entre los números de una fila con la anterior es constante y vale $(n+1)^2 - n^2$, donde n representa a la fila n-ésima. Entonces, la solución es

$$2022 + 45^2 - 44^2 = 2022 + 89 = 2111.$$

73. Determina el valor del ángulo sexadecimal x más próximo a 2022° que cumple la ecuación trigonométrica siguiente:

$$1 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{\sec^2 x} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{cotg}^2 x}.$$

Solución. Una curiosidad: el sistema sexagesimal es un sistema de numeración posicional que emplea como base el número 60. Tuvo su origen en la antigua Mesopotamia, en la civilización Sumeria. Es el más usado para medir tiempos (horas, minutos y segundos), así como ángulos (grados, minutos y segundos). El haber puesto *ángulo sexadecimal* ha sido un despiste por nuestra parte. Vamos a resolver el problema usando, por tanto, el sistema sexagesimal.

Agrupando los términos de la igualdad anterior de forma conveniente, tenemos:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = 1,$$

$$\frac{1}{\sec^2 x} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1,$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{cotg}^2 x} = \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}.$$

En consecuencia, llegamos a las igualdades

$$3 = \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow 3\cos^2 x = 1 + \operatorname{sen}^2 x = 2 - \cos^2 x.$$

De aquí se sigue que $\cos^2 x = 1/2$, luego $\cos x = \pm\sqrt{2}/2$ y , por tanto, las soluciones expresadas en grados sexagesimales son

$$\begin{cases} x &= \;\;45 + 180k, & k \in \mathbb{Z}, \\ x &= -45 + 180k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Como $2022 = 5 \cdot 360 + 222$, la solución de las anteriores más cercana a 2022° es

$$2025^\circ = 45^\circ + 180^\circ \cdot 11.$$

74. Encuentra todos los pares (m, n) de números enteros no negativos que son soluciones de la ecuación

$$m(n+1) + n(m-1) = 2022.$$

Solución. Reescribimos la ecuación anterior en la forma $2mn + m - n = 2022$ o, equivalentemente,

$$4mn + m - 2n = 4044 \Longleftrightarrow (2m-1)(2n+1) = 4043 = 13 \cdot 311.$$

Las posibles soluciones se obtienen resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} 2m - 1 = 1 & \to \quad m = 1, \\ 2n + 1 = 4043 & \to \quad n = 2021. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m - 1 = 13 & \to \quad m = 7, \\ 2n + 1 = 311 & \to \quad n = 155. \end{cases}$$

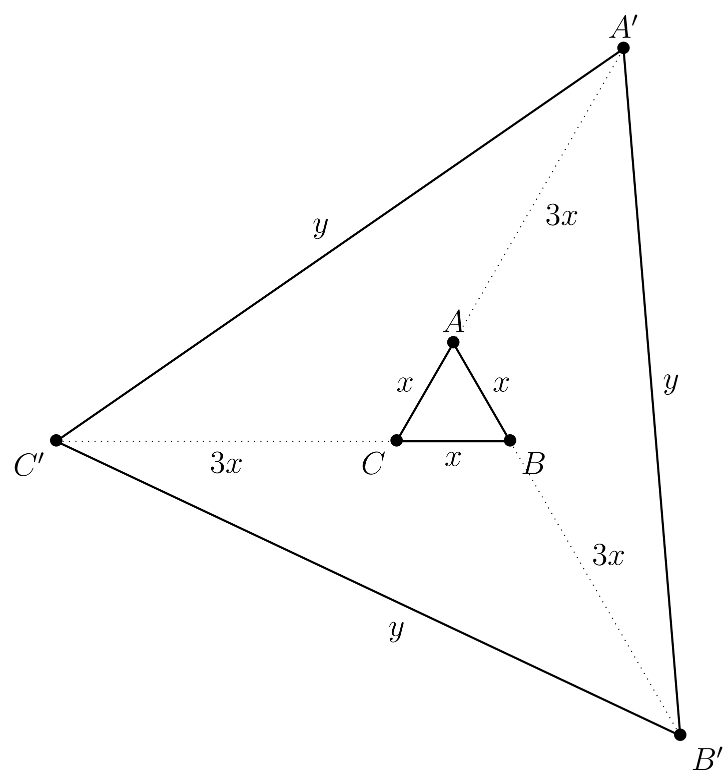
$$\begin{cases} 2m - 1 = 311 & \to \quad m = 156, \\ 2n + 1 = 13 & \to \quad n = 6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m - 1 = 4043 & \to \quad m = 2022, \\ 2n + 1 = 1 & \to \quad n = 0. \end{cases}$$

Los pares (m, n) pedidos son, en consecuencia, $(1, 2021)$, $(7, 155)$, $(156, 6)$ y $(2022, 0)$.

75. Sea ABC un triángulo equilátero. Extiende el lado AB más allá de B hasta un nuevo punto B' tal que $|BB'| = 3|AB|$. De forma análoga, extiende el lado BC más allá de C hasta un nuevo punto C' tal que $|CC'| = 3|BC|$. Por último, extiende el lado CA más allá de A hasta un nuevo punto A' tal q2ue $|AA'| = 3|CA|$. Â¿Qué relación hay entre las áreas de los triángulos ABC y $A'B'C'$?

Solución. Dibujamos los triángulos del enunciado, introduciendo como variable la longitud x de los lados del triángulo equilátero ABC (que podríamos suponer, sin pérdida de generalidad, que vale 1). Llamamos y a la longitud de los lados del triángulo equilátero $A'B'C'$.



Para determinar la relación entre x e y hacemos uso del teorema del coseno, aplicándolo, por ejemplo, al triángulo $C'BB'$. Notemos que $|C'B| = 4x$, $|BB'| = 3x$, $|C'B'| = y$ y el ángulo asociado al vértice B es de 120° (o $2\pi/3$ radianes). Por lo tanto:

$$y^2 = (4x)^2 + (3x)^2 - 24x^2 \cos(2\pi/3) = 37x^2 \Rightarrow y = \sqrt{37}x.$$

Si la longitud de un lado del triángulo se escala por un factor de $\sqrt{37}$, el área escala por un factor de $(\sqrt{37})^2 = 37$. Así, el área del triángulo $A'B'C'$ es 37 veces el área del triángulo ABC.

Otra fórmula de verlo es aplicando la fórmula de Herón. En este caso, el área del triángulo ABC es $A_1 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ siendo $s = 3x/2$ el semiperímetro y $a = b = c = x$ la longitud los lados del triángulo ABC. En consecuencia, $A_1 = \sqrt{3}x^2/4$.

Procediendo de forma similar con el triángulo $A'B'C'$, tenemos que su área es

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}y^2 = 37\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 37A_1.$$

También se puede llegar al mismo resultado dividiendo el triángulo $CC'A'$ en dos, trazando el segmento que une C' y A. El área del triángulo $C'CA$ es tres veces la del triángulo ABC, pues los lados $C'C$ y CB comparten altura. Análogamente, el área del triángulo $C'AA'$ es tres veces la del triángulo $C'CA$, pues los lados AC y AA' comparten altura. Es decir, el área de $C'CA'$ es 12 veces la de ABC y, por tanto, el área de $A'B'C'$ es 37 veces la de ABC.