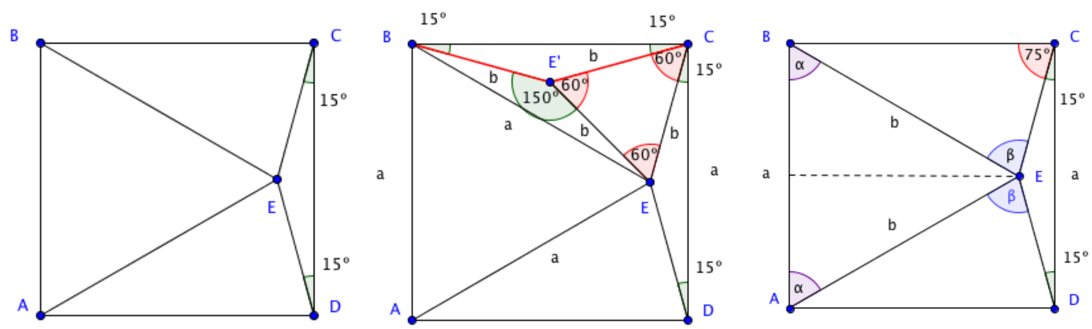
71. En el interior de un cuadrado $ABCD$, elegimos un punto E de modo que $\angle ECD = \angle EDC = 15^o$. Probar que el triángulo AEB es equilátero.

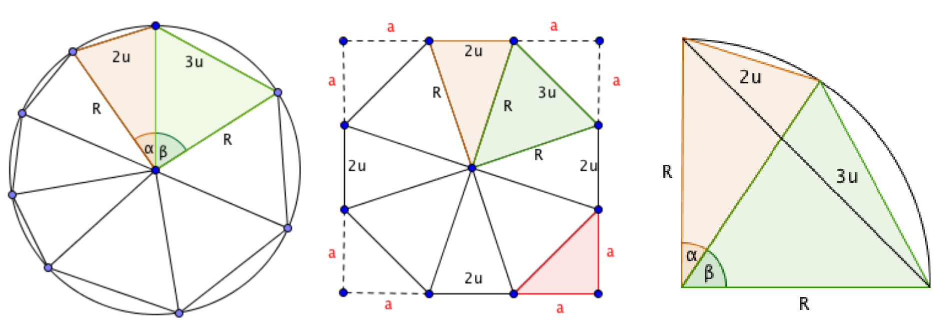


(a) (b) (c)

Solución 1: Completamos la configuración inicial dada en la figura (a) añadiendo el punto E' de modo que los triángulos $BE'C$ y CED son congruentes, tal y como aparece en la figura (b). En esta figura observamos que el triángulo $CE'E$ es isósceles con $\angle E'CE = 60^o$, luego es equilátero. Entonces $E'E = E'C = BE'$, esto es, el triángulo $BE'E$ es isósceles y $\angle BE'E = 150^o$, luego $\angle E'BE = 15^o = \angle E'EB$. Por tanto, el triángulo isósceles ABE cumple que $\angle ABE = 60^o$, luego es equilátero.

Solución 2: Nos fijamos en la figura (c) y vamos a realizar una prueba por **reducción al absurdo**. Suponemos que ABE no es equiláteto, luego $b \neq a$ lo que equivale a que o bien $b > a$ o bien $a > b$. Si $b > a$, el ángulo β debe ser menor de 75^o, luego $\angle AEB > 60^o$ y, por tanto, $\alpha < 60^o$; así, $\cos\alpha = \frac{a/2}{b} > \cos 60^o = \frac{1}{2}$, luego $a > b$, lo cual no es posible pues hemos supuesto $b > a$. Si $b < a$, β debe ser mayor de 75^o luego $\angle AEB < 60^o$ y, por tanto, $\alpha > 60^o$; así $\cos\alpha = \frac{a/2}{b} < \cos 60^o = \frac{1}{2}$, luego $a < b$, lo cual no es posible. Con cualquiera de las condiciones llegamos a una contracdición, luego nuestra suposición inicial $b \neq a$ no es posible. Esto nos lleva a que $a = b$.

72. Calcular el área de un octógono convexo inscrito en un círculo que tiene cuatro lados consecutivos de longitud 3u y los otros cuatro lados de longitud 2u. Dar la respuesta en la forma $a + b\sqrt{c}$.



(a) (b) (c)

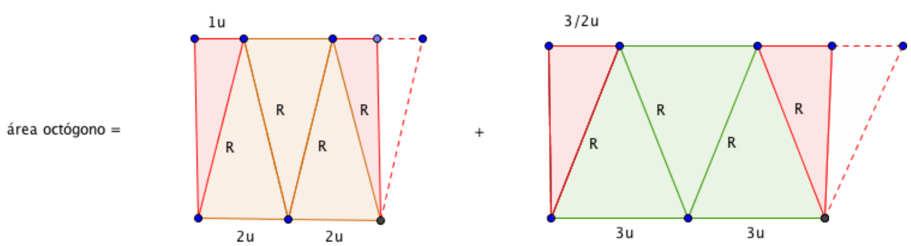
Solución 1: La figura (a) muestra la configuración original en la que observamos que $\alpha + \beta = 90^o$. Las figuras (b) y (c), muestran distintas reorganizaciones para calcular el área del octógono. Desde la figura (b), el cáculo es muy simple dado que hemos metido el octógono dentro de un cuadrado de lado $2+2a$ con $2a^2=9$, luego $a=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ y:

$$A_{octog}=(2+2a)^2-4\frac{1}{2}a^2=4((1+a)^2-\frac{1}{2}a^2)=4(1+2a+\frac{1}{2}a^2)=4(1+3\sqrt{2}+\frac{9}{4})=13+12\sqrt{2}.$$

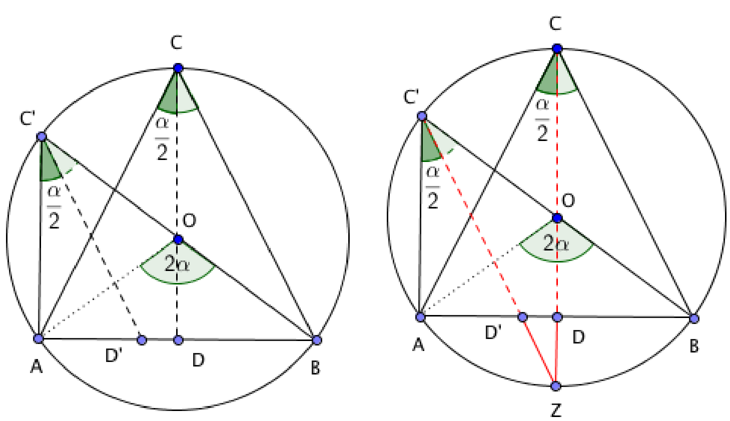
Solución 2: A completar como ejercicio desde la figura (c).

Solución 3: La figura inferior nos muestra otra forma de descomponer el área. En este caso, usando la fórmula de Herón del área de un triángulo y el hecho de que $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=45^o$ y que $\operatorname{sen}45^o=\cos 45^o=\frac{\sqrt{2}}{2}$, podemos calcular el radio R, cuyo cuadrado es $R^2=\frac{1}{2}(13+6\sqrt{2})$, la altura $h_1=\frac{1}{2}(2+3\sqrt{2})$ del triángulo de base $2u$ y la altura $h_2=\frac{1}{2}(3+2\sqrt{2})$ del triángulo de base $3u$. De este modo,

$$A_{octog}=4h_1+6h_2=13+12\sqrt{2}.$$



73. Probar que, entre todos los triángulos de base AB y ángulo opuesto en el vértice C fijos, el triángulo con longitud de bisectriz del ángulo C máxima es el isósceles.



(a) (b)

Solución: Observamos que todos estos triángulos se pueden inscribir en la misma circunferencia γ que se construye de la forma siguiente:

- Sobre el extremo A del segmento AB se traza una recta l que forme un ángulo α con el segmento.
- Trazamos una perpendicular l' a la recta l por el punto A y la mediatriz m del segmento AB.
- El punto O de intersección de l' y m es el centro de la circunferencia γ buscada, ya que $\angle AOB=2\alpha$.

Para resolver el problema, en la figura (a) hemos dibujado el triángulo isósceles ACB y otro tirángulo cualquiera $AC'B$ (sobre AB e inscrito en la circunferencia). Añadimos a la figura el punto medio del arco AB que denotamos por Z, observando que las prolongaciones de las bisectrices CD' y CD son concurrentes[1] en Z. El segmento $C'Z$ es menor o igual que CZ debido a que este último es un diámetro de la circunferencia. Además, el segmento $D'Z$ tiene longitud mayor que DZ por ser la hipotenusa del triángulo rectángulo $D'DZ$. De este modo tenemos (identificamos XY representa en la siguiente desigualdad longitud del segmento XY):

$$CD = CZ - DZ \geq CZ - D'Z \geq C'Z - D'Z = C'D',$$

lo que prueba la afirmación.

74. Sea ABC un triángulo rectángulo en C, con hipotenusa AB y cateto más largo BC. Sea D el pie de la altura trazada desde el vértice C. La circunferencia de centro D y radio DC corta al cateto BC en el punto Q y a la recta AB en dos puntos distintos E y F, de tal modo que F está sobre la hipotenusa AB. Si P es el punto de corte entre el segmento QE y el cateto AC, probar que $PE = QF$.

(LIII OME, fase local Salamanca, Problema no. 6)

Figura 1

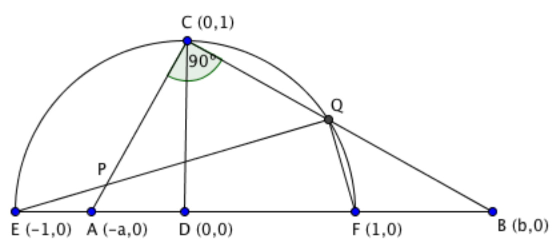
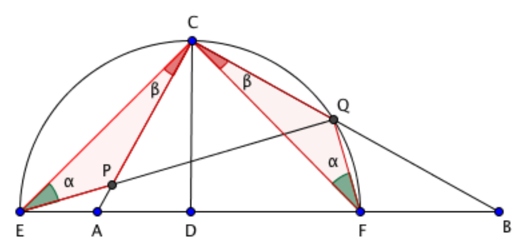


Figura 2



Solución 1 (euclídea): Añadimos a la configuración inicial dada en la Figura 1 los segmentos auxiliares EC y CF, de igual longitud ya que D es el punto medio del segmento EF, como muestra la Figura 2. Por arco capaz, usando la cuerda CQ, observamos que $\angle CEQ = \alpha = \angle CFQ$. Como ACB y ECF (EF es un diámetro) son rectángulos en C, también tenemos que $\angle ECA = \beta = \angle FCQ$. Por tanto los triángulos CEP y CFQ son congruentes (iguales salvo posición), lo que nos dice que $EP = QF$.

Solución 2 (analítica): Por la disposición de la configuración, parece natural tomar como ejes cartesianos las rectas AB-eje x y DC-eje y. Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la unidad es la longitud del segmento DF. Esto nos lleva a las coordenadas de los puntos básicos de la configuración que aparecen en la Figura 1. Tenemos que encontrar las coordenadas de los puntos Q y P y comprobar que las distancias entre P y E y Q y F son iguales. Usaremos para los cálculos las distintas fórmulas de rectas, circunferencias y distancias incluídas en las notas de Geometría 2.

- Circunferencia γ de centro $D(0,0)$ y radio 1: $x^2 + y^2 = 1$.
- Recta BC: $y = -\dfrac{1}{b}x + 1$ y recta AC: $y = \dfrac{1}{a}x + 1$.

[1] Todas las bisectrices de ángulos inscritos en una circunferencia y correspondientes a la misma cuerda AB, concurren en el punto medio del arco AB (arco en sentido antihorario).

- Punto $Q = BC \cap \gamma$: resolvemos el sistema de ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$ e $y = -\frac{1}{b}x + 1$ una de cuyas soluciones es el punto $C(0,1)$; la otra nos proporciona las coordenadas de Q:
$$Q(\frac{2b}{b^2+1}, \frac{b^2-1}{b^2+1}).$$
- Recta $EQ : y = -\frac{b-1}{b+1}(x+1)$.
- Punto $P = EQ \cap AC$: resolvemos el sistema de ecuaciones $y = \frac{1}{a}x + 1$ e $y = -\frac{b-1}{b+1}(x+1)$ que nos da como única solución el punto P:
$$P(\frac{-2}{b^2+1}, \frac{(b-1)^2}{b^2+1}).$$

Ahora solamente nos queda calcular las distancias. Calculamos sus cuadrados:
$$d(E,P)^2 = (-1 + \frac{2}{b^2+1})^2 + (-\frac{(b-1)^2}{b^2+1})^2 = \frac{2(b-1)^2}{b^2+1}$$
y
$$d(F,Q)^2 = (\frac{2b}{b^2+1} - 1)^2 + (\frac{b^2-1}{b^2+1})^2 = \frac{2(b-1)^2}{b^2+1}.$$
Como $d(E,P)^2 = d(F,Q)^2$ y las distancias son positivas, $d(E,P) = d(F,Q)$ que es lo que nos pedían probar.

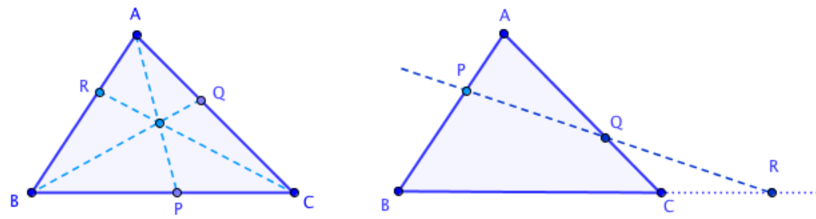
75. Tomamos tres puntos fijos alineados A, B, C y ordenados de izquierda a derecha. Sea γ una circunferencia que pasa por A y C cuyo centro no está sobre AC y P el punto por el que pasan las tangentes a γ por A y C. La circunferencia γ corta a la recta PB en el punto Q. Probar que el punto de corte de la bisectriz del ángulo $\angle AQC$ y la recta AC es independiente de la circunferencia γ tomada.

(44th IMO 2003)

Observaciones: Explicaremos las dos soluciones oficiales al problema (una euclídea y la otra analítica). Cuatro son los resultados en los que se basan las soluciones. El primero de ellos nos ha aparecido en el problema de bisectrices de triángulos con base y ángulo opuesto fijos. El segundo es el teorema del seno para triángulos. Los otros dos son el Teorema de Ceva en su versión trigonométrica que caracteriza rectas concurrentes en triángulos y su dual, el Teorema de Menelao, que caracteriza puntos concurrentes.

Teorema de Ceva (trigonométrico). Sean AP, CR y BQ tres cevianas de un triángulo ABC. Una condición necesaria y suficiente para que estas tres cevianas concurran en un mismo punto es que
$$\frac{\operatorname{sen}\angle ACR}{\operatorname{sen}\angle RCB} \cdot \frac{\operatorname{sen}\angle BAP}{\operatorname{sen}\angle PAC} \cdot \frac{\operatorname{sen}\angle CBQ}{\operatorname{sen}\angle QBA} = 1.$$

Teorema de Menelao. En un triángulo ABC tomamos tres puntos P, R y Q sobre los lados AB, BC y CA (o sus prolongaciones). Una condición necesaria y suficiente para que estos tres puntos estén alineados es que
$$\frac{BP}{PA} \cdot \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RB} = 1.$$



Teorema de Ceva   Teorema de Menelao

La Figura 1 ofrece una imagen parcial de la configuración que construiremos para resolver este problema. Reconocer de forma inmediata la relación entre los distintos ángulos indicados en la figura es un ejercicio de interés general en la resolución de problemas en geometría plana donde la noción de arco capaz es muy importante. La Figura 3 representa una configuración del problema y las Figuras 3 y 4 son las que usaremos para dar las soluciones.

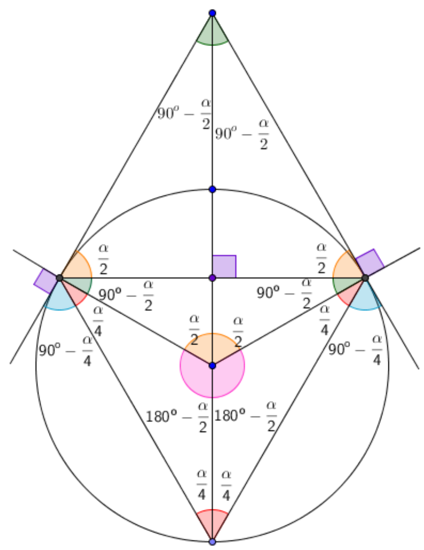


Figura 1

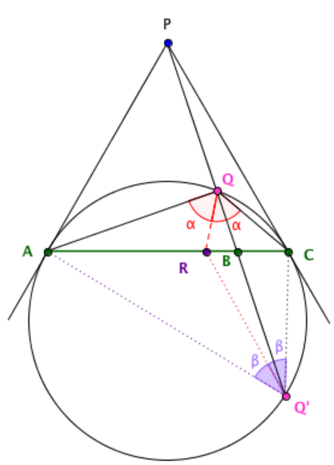


Figura 2

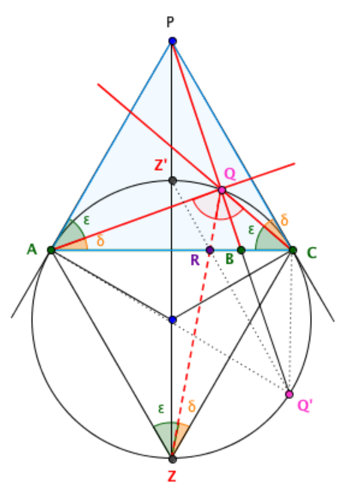


Figura 3

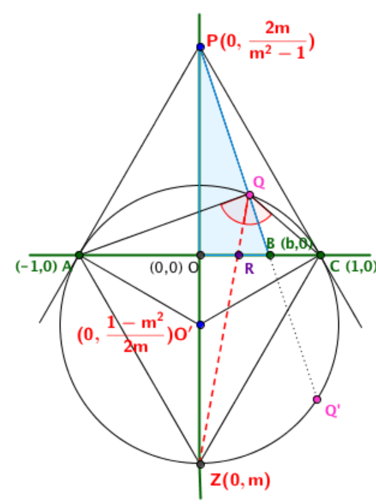


Figura 4

Solución 1 (euclídea): La recta PB proporciona dos puntos de corte con la circunferencia γ, Q y Q'. Trabajaremos con la configuración del problema en la Figura 2 dada por el punto Q. Completamos la Figura 2 añadiendo el punto Z, la recta QZ y otros objetos que aparecen en la Figura 1, llegando a la Figura 3. Observamos que los puntos Q, R y Z están alineados por el argumento de las bisectrices. Por arco capaz sobre la cuerda QC, $\angle QAC = \angle QZC = \delta$. El mismo argumento sobre la cuerda AQ nos dice que $\angle AZQ = \angle ACQ = \epsilon$. Usando la Figura 1, $\epsilon + \gamma = \angle PAC = \angle PCA = \angle AZC$, luego $\angle AZQ = \epsilon$ y $\angle QCP = \delta$.

Para probar que R, punto de corte de la bisectriz sobre Q con la cuerda AC, es independiente de γ, deberemos relacionar proporcionalmente R con los segmentos que el punto B determina sobre la cuerda AC (datos fijos). En la Figura 3 nos centramos en el triángulos isósceles PAC y AZC a los que la recta PB divide en otros dos: APB y PBC y AZR y RZC respectivamente. Procedemos como sigue:

- Aplicamos el Teorema del seno a los triángulos APB y BPC:
$$\frac{PA}{\operatorname{sen}\angle PBA} = \frac{AB}{\operatorname{sen}\angle APB} = \frac{BP}{\operatorname{sen}\angle PAB} \text{ y } \frac{PC}{\operatorname{sen}\angle PBC} = \frac{PB}{\operatorname{sen}\angle PCB} = \frac{BC}{\operatorname{sen}\angle BPC}$$
Como $PA = PC$, Y $\operatorname{sen}\angle PBA = \operatorname{sen}(180^o - \angle PBC) = \operatorname{sen}\angle PBC$, tenemos que $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\operatorname{sen}\angle APB}{\operatorname{sen}\angle BPC}$.
- Razonando de forma análoga con el isósceles AZC, llegamos a que $\dfrac{AR}{RC} = \dfrac{\operatorname{sen}\epsilon}{\operatorname{sen}\delta}$.
- Aplicamos Ceva trigonométrico sobre las cevianas de PAC, PQ, AQ y CQ, que son concurrentes en Q y tenemos que:
$$1 = \frac{\operatorname{sen}\angle PCQ}{\operatorname{sen}\angle QCA}\cdot\frac{\operatorname{sen}\angle APB}{\operatorname{sen}\angle BPC}\cdot\frac{\operatorname{sen}\angle QAC}{\operatorname{sen}\angle QAP} = \frac{\operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}\epsilon}\cdot\frac{AB}{BC}\cdot\frac{\operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}\epsilon}$$

De la información previa concluímos que $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{(\operatorname{sen}\epsilon)^2}{(\operatorname{sen}\delta)^2} = \dfrac{AR^2}{RC^2}$, lo que prueba que R no depende de la circunferencia tomada.

Solución 2 (analítica): Introducimos coordenadas tomando AC como eje x y $O'P$ como eje y, luego O', punto medio de AC es el origen de coordenadas. Centramos la configuración con unidad en $C(1,0)$, luego $A(-1,0)$. Asignamos coordenadas a los puntos $B(b,0)$ y $Z(0,-m)$, observamos que $m > 1$ y que $0 \geq b \leq 1$ por la forma en que hemos dispuesto la figura. Con cuentas precisas vamos a ir introduciendo las coordenadas de los otros puntos significativos de la configuración que aparecen en la Figura 4. La ecuación de la circunferencia γ, $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, la obtenemos imponiendo que pasa por los puntos $A(-1,0)$, $C(1,0)$ y $Z(0,-m)$. De este modo llegamos a:

$$\gamma \equiv x^2 + y^2 + \frac{m^2-1}{m}y - 1 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + (y - \frac{1-m^2}{2m})^2 = (\frac{1+m^2}{2m})^2.$$

Esto nos proporciona el radio de γ, $r = \dfrac{1+m^2}{2m}$ y las coordenadas el centro $O'(0, \dfrac{1-m^2}{2m})$.

Denotamos por $q = \dfrac{1-m^2}{2m} > 0$ y observamos que, apoyándonos en la Figura 1,

$$q = \frac{q/r}{1/r} = \frac{\operatorname{sen}(90^o - \frac{\theta}{2})}{\cos(90^o - \frac{\theta}{2})} = \frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}},$$

donde $\theta = \angle AO'C$. Calculamos ahora las coordenadas de los puntos P y Q:

- Punto P: de coordenadas $P(0,p)$ con
$$\frac{1}{p}=\frac{1/AP}{p/AP}=\frac{\text{sen}(90^o-\frac{\theta}{2})}{\cos(90^o-\frac{\theta}{2})}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}},$$
(volvemos a usar la Figura 1) luego $p=\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{q}$. De este modo, tenemos que
$$P(0,\frac{2m}{m^2-1})$$

- Punto Q: es el punto de intersección de la circunferencia γ y la recta PB de ecuación $y=\dfrac{2m}{b(1-m^2)}(x-b)$, luego $Q(q_0,\dfrac{2m}{b(1-m^2)}(q_0-b))$. Al imponer que el punto está en γ, obtenemos como soluciones los puntos Q y Q' (hay que tener cuidado al resolver y usar que $\sqrt{d^2}=\mid d\mid$), aquí $p=\frac{2m}{m^2-1}$:
$$Q,Q'=(\frac{b(1+p^2)\mp b\sqrt{(1+p^2)(1-b^2)}}{b^2+p^2},\frac{-p(1-b^2)\pm p\sqrt{(1+p^2)(1-b^2)}}{b^2+p^2}).$$
El punto Q es
$$Q=(\frac{b(1+p^2)-b\sqrt{(1+p^2)(1-b^2)}}{b^2+p^2},\frac{-p(1-b^2)+p\sqrt{(1+p^2)(1-b^2)}}{b^2+p^2}).$$

- Punto R (cuenta no simple): lo obtenemos como intersección de las recta ZQ y AC. El resultado es $R(\dfrac{b}{1+\sqrt{1-b^2}},0)$.

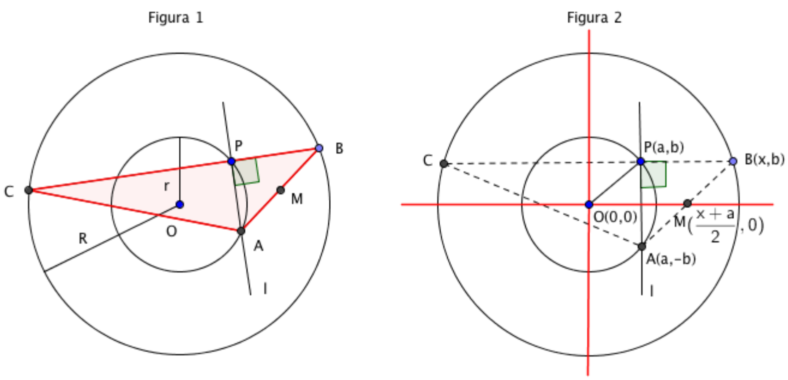
La solución oficial usa el Teorema de Menelao sobre el triángulo POB dando la relación de proporcionalidad
$$\frac{OR}{RB}=\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}.$$
. Esto prueba que R solamente depende de A,B y C. La relación de proporcionalidad la obtiene de la forma siguiente: como los puntos O,R y Z están alineados, usando el Teorema de Menelao tenemos que
$$\frac{PQ}{QB}\cdot\frac{BR}{RO}\cdot\frac{OZ}{ZP}=1\Longleftrightarrow\frac{OR}{RB}=\frac{PQ}{QB}\cdot\frac{OZ}{ZP}.$$
Calculamos el cociente de los cuadrados de las distancias de$P$ y de B a Q:
$$\frac{PQ^2}{BQ^2}=\frac{q_0^2}{(q_0-b)^2}\Rightarrow\frac{PQ}{BQ}=\frac{\mid q_0\mid}{\mid q_0-b\mid}=\frac{q_0}{b-q_0},$$
y las distancias de Z a O y P: $OZ=m$ y $PZ=m+\dfrac{2m}{m^2-1}$. Sustituímos en la proporción $\frac{OR}{RB}$ y simplificamos.

76. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias concéntricas de radios R y r repectivamente con $R>r$. En la circunferencia pequeña, tomamos tomamos un punto P fijo y B un punto variable de la grande. La recta BP corta a la circunferencia grande en el punto C al otro lado de P. La recta perpendicular l a BP por el punto P corta a la pequeña en el punto A (si l es tangente a la circunferencia pequeña, $P=A$). Se pide:

a) Calcular $BC^2 + CA^2 + AB^2$.

b) Calcular el lugar geométrico del punto medio de AB.

(39th IMO 1998)



Solución: La Figura 1 muestra una de las posibles configuraciones. Para cada punto B vamos a elegir un sistema cartesiano que nos permita dar respuesta inmediata al apartado (a) y determinar de forma intuitiva el lugar geométrico que nos piden en (b).

Trazamos la recta PB y las rectas l paralela y l' perpendicular a PB por el punto O que van a ser nuestros ejes cartesianos en función de B. La elección de los ejes x e y y las partes positivas o negativas va a depender de la posición de los puntos P y B, atendiendo a una de las siguientes situaciones:

1. Los puntos P y B están en el mismo cuadrante (uno de los cuatro determinados por l y l').
2. Los puntos P y B están en distinto cuadrante.

En la situación 1, los ejes cartesianos los podemos redefinir de forma que P y B estén en el primer cuadrante; es la configuración que nos muestra la Figura 2. Intercambiando los papeles de B y C, por simetría, la situación 2 la podemos reducir a la 1. Por tanto, sin pérdida de generalidad trabajaremos con la Figura 2.

Las circunferencias C_1 y C_2 tienen ecuaciones $x^2+y^2 = R^2$ y $x^2+y^2 = r^2$ repectivamente. Para calcular la suma de cuadrados S del apartado (a), usamos que $C(-x, b)$, que $x^2+b^2 = R^2$ (el punto B está en C_1) y que $a^2 + b^2 = r^2$ (P está en C_2). Así tenemos:

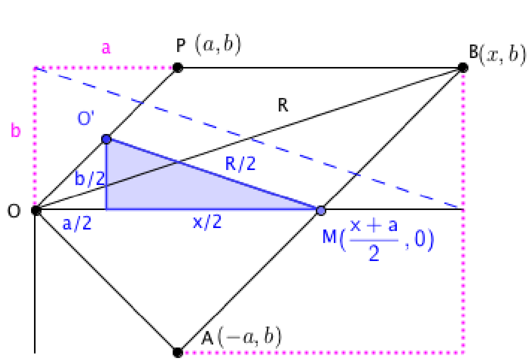
$$S = (2x)^2+(a+x)^2+(2b)^2+(x-a)^2+(2b)^2 = 6x^2+2a^2+8b^2 = 6(x^2+b^2)+2(a^2+b^2) = 6R^2+2r^2.$$

La suma nos proporciona siempre el valor fijo $S = 6R^2 + 2r^2$.

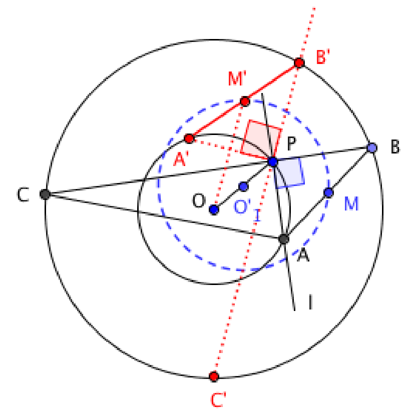
Observamos ahora las coordenadas del punto medio $M(\frac{x+a}{2}, 0)$. Tenemos que relacionar estas coordenadas con la parte fija de nuestra configuración (ver figura (a) inferior): las circunferencias de radios R y r, las coordenadas a y b de P y el hecho de que $x^2+b^2 = R^2$. Observamos que $\frac{x+a}{2} = \frac{x}{2} + \frac{a}{2}$ y que

$$(\frac{x}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2})^2 = \frac{x^2}{4} = \frac{R^2}{4} - \frac{b^2}{4} \Longleftrightarrow (\frac{x}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2})^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{R^2}{4}.$$

Esto es, el punto (todos los puntos) M está en la circunferencia γ de centro $O'(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$, punto medio de O y P, y radio $\frac{R}{2}$, la mitad del radio de la circunferencia C_1. Además, todos los puntos de γ aparecen mediante la construcción dada (ver figura (b) inferior). En efecto: si tomamos un punto M' en γ, trazamos la recta OM' y la recta l_P paralela a OM' por el punto P, tenemos que el punto $B' = l_P \cap C_1$ determina el punto M' como punto medio de $A' = m \cap C_2$ donde m es la perpendicular a OM' por el punto P.



(a)



(b)

77. En un triángulo ABC, sea P el pie de la altura desde el vértice A y H el ortocentro. Si $p = \frac{AP}{HP}$:

a) Expresar la relación entre los ángulos sobre los vérices B y C en función de p.

b) Si B y C son fijos, hallar el lugar geométrico del vértice A para cada valor de p.

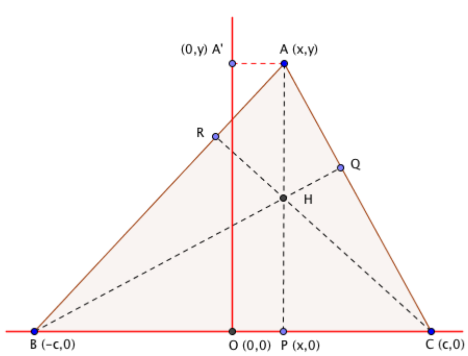


Figura 1

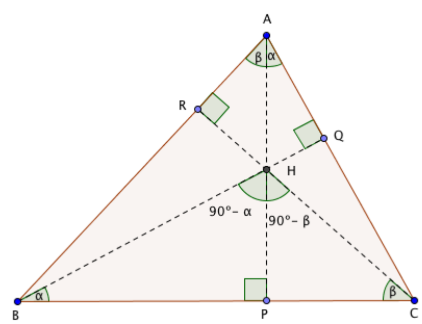


Figura 2

Solución: Para el apartado (a), nos fijamos en la Figura 2 observando que $\angle ABC = 90^o - \beta$ y que $\angle ACB = 90^o - \alpha$. De este modo tenemos que:

$$\tan \angle ABC = \frac{\operatorname{sen} \angle ABC}{\cos \angle ABC} = \frac{\operatorname{sen}(90^o - \beta)}{\cos(90^o - \beta)} = \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{1}{\tan \angle HCP}$$

y

$$\tan \angle ACB = \frac{\operatorname{sen} \angle ACB}{\cos \angle ABC} = \frac{\operatorname{sen}(90^o - \alpha)}{\cos(90^o - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\tan \angle HBP}.$$

Por otro lado, usando $p = \dfrac{AP}{HP}$, tenemos que $\tan \angle HBP = \dfrac{HP}{BP} = \dfrac{AP}{p \cdot BP} = \dfrac{1}{p} \tan \angle ABC$, luego

$$p = \tan \angle ACB \cdot \tan \angle ABC.$$

Para el apartado (b), como B y C son fijos y A variable, elegimos unos ejes coordenados que respeten la parte fija de la configuración. De este modo, tomamos BC como eje x y el punto medio de BC, que denotamos por O, como el origen de coordenadas y obtenemos las coordenadas descritas la Figura 1.

Como el punto A está determinado por los ángulos $\angle ABC = 90^o - \beta$ y $\angle ACB = 90^o - \alpha$, vamos a relacionar el punto $A(x, y)$ con la relación entre las tangentes $p = \tan \angle ACB \cdot \tan \angle ABC$. De este modo tenemos que

$$\tan \angle ACB = \frac{y}{c - x}, \quad \tan \angle ABC = \frac{y}{c + x}.$$

Luego

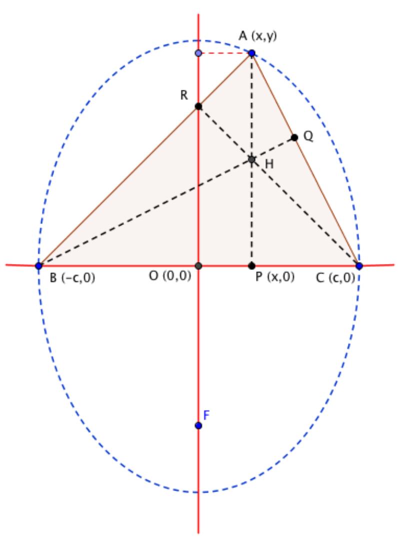
$$p = \frac{y}{c - x} \cdot \frac{y}{c + x} \Leftrightarrow y^2 = p(c^2 - x^2) \Leftrightarrow \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{p \cdot c^2} = 1.$$

La ecuación que satisfacen los vértices $A(x, y)$ es la de una elipse $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1)$ pues $p > 0$ donde $a = c$ y $b = c\sqrt{p}$. Debemos tener en cuenta q ue la distancia semifocal f (mitad de distancia entre focos) satisface :

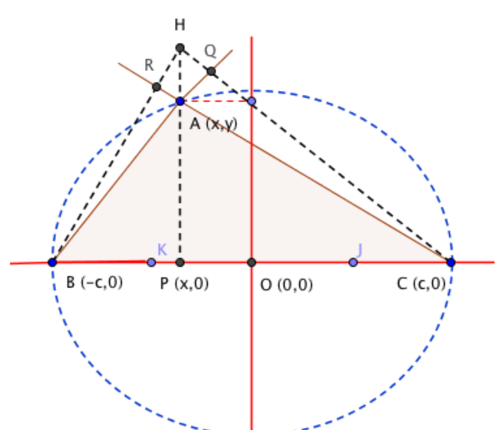
- $a^2 = b^2 + f^2$ si $a > b$ • $b^2 = a^2 + f^2$ si $a < b$.

Por tanto hay que distinguir dos casos ($p \neq 1$ pues $AP \neq HP$):

- $p < 1$: En este caso $c > c\sqrt{p}$, luego tenemos una elipse horizontal con centro en el orígen $O(0, 0)$, que es el punto medio del segmento BC y distancia semifocal $f = c\sqrt{1 - p}$.
- $p > 1$: En este caso $c > c\sqrt{p}$, luego tenemos una elipse vertical con centro en el orígen $O(0, 0)$, que es el punto medio del segmento BC y distancia semifocal $f = c\sqrt{p - 1}$.



(a)



(b)