

Seminario de problemas. Curso 2018-19. Hoja 0

1. Si $a = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}$ y $b = \sqrt{9 - \sqrt{9 - \sqrt{9 - \dots}}}$, ¿cuál es el valor de $a \cdot b$?

Solución:

$$a = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}} \rightarrow a^2 = 6 + a \rightarrow a^2 - a - 6 = 0 \rightarrow \boxed{a=3}, a = -2 \text{ no vale}$$

$$b = \sqrt{9 - \sqrt{9 - \sqrt{9 - \dots}}} \rightarrow b^2 = 9 - b \rightarrow b^2 + b - 9 = 0 \rightarrow \boxed{b = \frac{-1 + \sqrt{37}}{2}}, b = \frac{-1 - \sqrt{37}}{2} \text{ no vale}$$

$$\text{Resultado: } a \cdot b = 3 \cdot \frac{-1 + \sqrt{37}}{2} = \boxed{\frac{3}{2} \cdot (\sqrt{37} - 1)}$$

2. ¿Para cuántos enteros n con $1 \leq n \leq 100$ se verifica que el número n^n es un cuadrado perfecto?

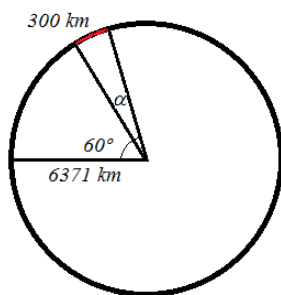
Solución:

$$n^n \text{ cuadrado perfecto } (1 \leq n \leq 100) \begin{cases} n \text{ par : todos} \rightarrow 50 \text{ casos} \\ n \text{ impar : solo si la base } (n) \text{ es cuadrado perfecto} \\ 1; 3^2 = 9; 3^4 = 81; 5^2 = 25; 7^2 = 49 \rightarrow 5 \text{ casos} \end{cases}$$

$$\text{Resultado: } 50 + 5 = \boxed{55 \text{ enteros}}$$

3. Dos ciudades A y B están situadas en el mismo paralelo de la esfera terrestre, mientras que la ciudad C se halla en el mismo meridiano que A. La latitud de A es $\varphi = 60^\circ$ norte.
- a) Si la ciudad C está a 300 km al norte de A, calcula su latitud considerando que el radio de la Tierra es, aproximadamente, 6.371 km.

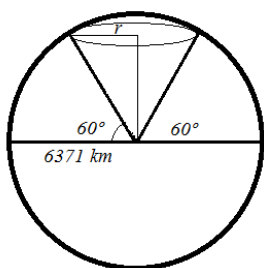
Solución:



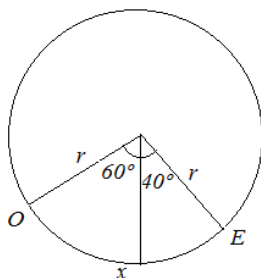
$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \cdot 6371 \text{ km} \rightarrow 360^\circ \\ 300 \text{ km} \rightarrow \alpha^\circ \end{array} \right\} \alpha = \frac{300 \text{ km} \cdot 360^\circ}{2\pi \cdot 6371 \text{ km}} = 2,6980^\circ = 2^\circ 41' 52,67''$$

$$\text{Resultado: } \boxed{62^\circ 41' 52,67'' \text{ Norte}}$$

- b) Si las ciudades A y B tienen de longitud $\alpha = 60^\circ$ oeste y $\beta = 40^\circ$ este, respectivamente, ¿qué distancia les separa?



$$r = \frac{6371}{2} \text{ km}$$



$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \cdot \frac{6371}{2} \text{ km} \rightarrow 360^\circ \\ x \text{ km} \rightarrow 100^\circ \end{array} \right\} x = \frac{6371\pi \text{ km} \cdot 100^\circ}{360^\circ} =$$

$$\text{Resultado: } \boxed{5559,746 \text{ km}}$$

4. Si se escribe la edad de *Elena* y a continuación la edad de *Lucía* se obtiene un número de cuatro cifras que es un cuadrado perfecto. Si se hiciera lo mismo dentro de once años, se tendría de nuevo un cuadrado perfecto de cuatro cifras.
Calcular las edades actuales de *Elena* y *Lucía*.

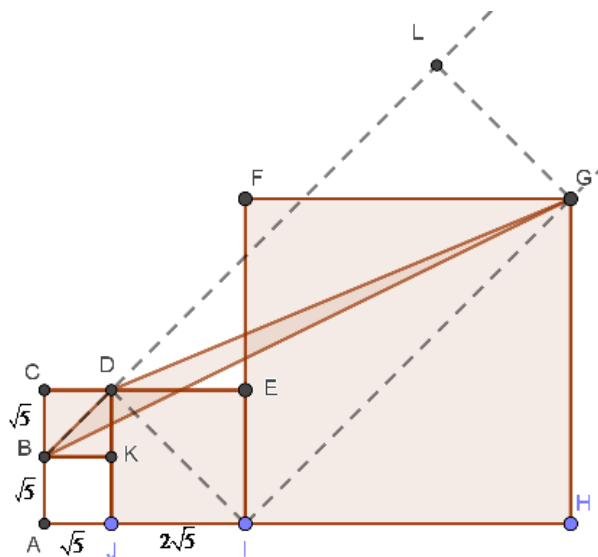
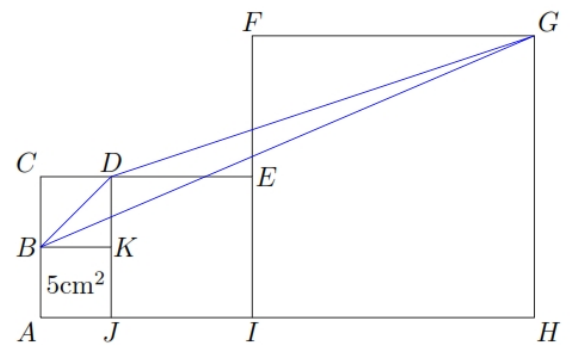
Solución:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Elena : } x(2 \text{ cifras}) \quad 100x + y = a^2 \\ \text{Lucía : } y(2 \text{ cifras}) \quad 100(x+11) + (y+11) = b^2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 100x + y = a^2 \\ 100x + y + 1111 = b^2 \end{array} \right\}$$

$$a^2 + 1111 = b^2 \rightarrow b^2 - a^2 = (b+a) \cdot (b-a) = 1111 = 101 \cdot 11$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} b+a=101 \\ b-a=11 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} b=56 \\ a=45 \end{array} \right\} \rightarrow 100x + y = a^2 = 45^2 = 2025 \text{ Resultado: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Elena} = x = 20 \text{ años} \\ \text{Lucía} = y = 25 \text{ años} \end{array} \right.$$

5. Si $ABKJ$, $BCDK$, $DEIJ$ y $FGHI$ son cuadrados, calcular el área del triángulo BDG , sabiendo que el área del cuadrado $ABKJ$ es igual a 5 cm^2 .



Solución:

Consideramos BD como base del triángulo BDG :

$$\overline{BD} = \sqrt{\sqrt{5}^2 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{10}$$

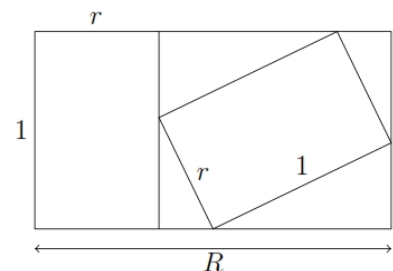
Independientemente del lado del cuadrado grande $IHGF$, la altura del triángulo BDG , dado que BL es paralelo a IG es:

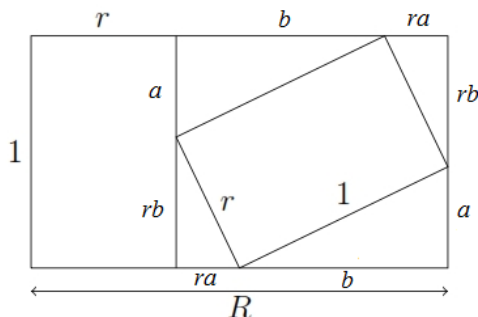
$$\overline{LG} = \overline{DI} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{Área}(BDG) = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{LG}}{2} = \frac{\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10}}{2} = 10$$

Resultado: 10 cm^2

6. Un rectángulo $R \times 1$, tal que $R < 2$, se divide en dos partes, como se muestra en la figura, de manera que una de las partes encaja justa en la otra parte. ¿Cuanto debe valer r para que esto sea posible?





Solución:

Los cuatro triángulos son iguales dos a dos y semejantes con razón de proporcionalidad r .

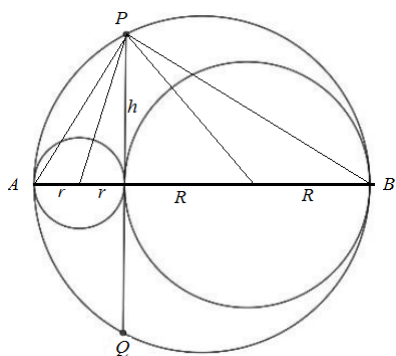
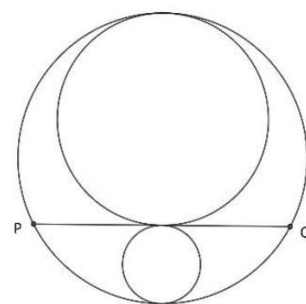
$$\begin{cases} a + rb = 1 \rightarrow a = 1 - rb \\ a^2 + b^2 = 1 \rightarrow (1 - rb)^2 + b^2 = 1 \rightarrow 1 - 2rb + r^2b^2 + b^2 = 1 \\ b(-2r + r^2b + b) = 0 \end{cases} \begin{cases} b = 0 \rightarrow a = 1 \rightarrow R = 2r \rightarrow r = R/2 \\ -2r + r^2b + b = 0 \rightarrow b = \frac{2r}{1+r^2} \rightarrow a = 1 - r \frac{2r}{1+r^2} = \frac{1-r^2}{1+r^2} \end{cases}$$

$$\text{Como } R = r + ra + b = r + r \frac{1-r^2}{1+r^2} + \frac{2r}{1+r^2} = \frac{r+r^3+r-r^3+2r}{1+r^2} = \frac{4r}{1+r^2}$$

$$R = \frac{4r}{1+r^2} \rightarrow Rr^2 - 4r + R = 0 \rightarrow r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4R^2}}{2R} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - R^2}}{R} \text{ (con la suma no es válido)}$$

$$\text{Resultado: } r = \frac{2 - \sqrt{4 - R^2}}{R} \text{ y } r = \frac{R}{2}$$

7. Tres circunferencias son tangentes entre sí, como en la figura adjunta. La región del círculo exterior que no está cubierta por los dos círculos interiores tiene un área igual a $2\pi \text{ m}^2$.
Calcula la longitud del segmento PQ .



Solución:

Área entre el círculo exterior y los interiores

$$A = \pi(R+r)^2 - \pi R^2 - \pi r^2 = 2\pi Rr = 2\pi \rightarrow Rr = 1$$

Por el Teorema de la altura sobre el triángulo rectángulo APB :

$$h^2 = 2R \cdot 2r = 4Rr \rightarrow h = \sqrt{4Rr} = 2\sqrt{Rr}$$

$$\text{Resultado: } \overline{PQ} = 2h = 4\sqrt{Rr} = \boxed{4 \text{ m}^2}$$

8. Determina un entero N compuesto de los factores primos 2, 5 y 7 sabiendo que $5N$, $7N$ y $8N$ tienen respectivamente 8, 12 y 18 divisores más que N .

Solución:

Sea $N = 2^a \cdot 5^b \cdot 7^c$, su número de divisores es $(a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1)$, mientras que:

El número de divisores de $5N$ es $(a+1) \cdot (b+2) \cdot (c+1) = (a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) + 8$ (1)

“ “ “ “ $7N$ es $(a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+2) = (a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) + 12$ (2)

“ “ “ “ $8N$ es $(a+4) \cdot (b+1) \cdot (c+1) = (a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) + 18$ (3)

$$\begin{cases} (1) : (a+1) \cdot (c+1) = 8 \\ (2) : (a+1) \cdot (b+1) = 12 \\ (3) : 3 \cdot (b+1) \cdot (c+1) = 18 \rightarrow (b+1) \cdot (c+1) = 6 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} (2) \\ (3) \end{array} \right. = \frac{a+1}{c+1} = 2 \rightarrow a+1 = 2(c+1)$$

$$(1): 2 \cdot 2(c+1)^2 = 8 \rightarrow c+1 = \sqrt{4} = \pm 2 \rightarrow c = -3 \text{ (no vale)}, c = 1$$

$$\rightarrow (a+1) \cdot 2 = 8 \rightarrow a = 3 \rightarrow 4 \cdot (b+1) = 12 \rightarrow b = 2$$

$$\text{Resultado: } N = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = \boxed{1400}$$