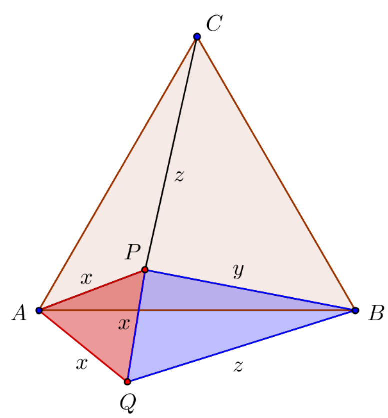
Seminario de problemas. Curso 2014-15. Hoja 9

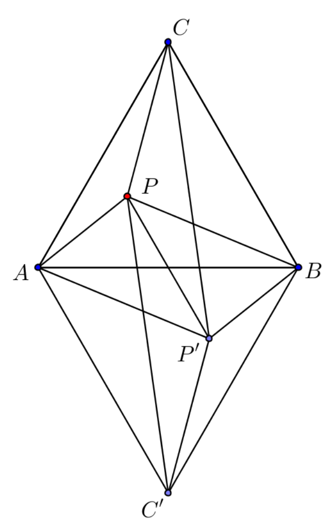
57. Se pincha aleatoriamente un punto P en el interior de un triángulo equilátero ABC. ¿Cuál es la probabilidad de que los segmentos PA, PB y PC sean los lados de un triángulo acutángulo?

Solución.

En primer lugar vamos a justificar que los segmentos PA, PB y PC siempre son los lados de un triángulo. Para ello (primera figura), sea Q la imagen del punto P por el giro de $(-60°)$ en torno al vértice A. El triángulo APQ es también equilátero, luego $PQ = PA = x$. En ese giro, la imagen del vértice C es el vértice B, luego el segmento QB es la imagen del segmento PC, de modo que $QB = PC = z$. Los lados del $\triangle PQB$ son los segmentos PA, PB y PC.



En segundo lugar vamos a probar que el lugar geométrico de los puntos P tales que, por ejemplo, $PA^2 + PB^2 = PC^2$, es la circunferencia de radio igual al lado del $\triangle ABC$ y que pasa por A y B (que tiene el centro en el punto C' simétrico del vértice C respecto del lado AB y es tangente a las bisectrices de los ángulos en A y B). Esto podría hacerse con geometría analítica.



Sea P' el simétrico del punto P respecto del punto medio del segmento AB. Aplicando la *ley del paralelogramo* en los paralelogramos $PAP'B$ y $PCP'C'$, tenemos

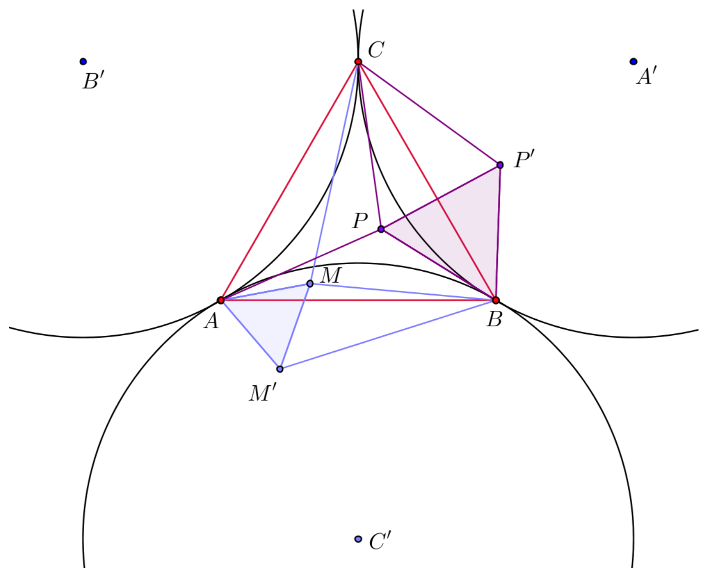
$$PA^2 + PB^2 = \frac{1}{2}(PP'^2 + AB^2), \quad \text{y} \quad PC^2 = \frac{1}{2}(PP'^2 + CC'^2) - PC'^2.$$

Cuando (y solo cuando) se cumple $PA^2 + PB^2 = PC^2$ resulta, igualando las dos expresiones anteriores,

$$\frac{1}{2}\,AB^2 = \frac{1}{2}\,CC'^2 - PC'^2.$$

Pero $CC'^2 = 3\,AB^2$, y resulta $PC'^2 = AB^2$, luego P es en efecto un punto de la circunferencia que hemos descrito arriba.

Si M es un punto del segmento circular que determina esta circunferencia en el interior del triángulo, el triángulo construido con los segmentos MA, MB y MC es obtusángulo porque se cumple $MA^2 + MB^2 < MC^2$.



Los tres segmentos circulares correspondientes a las tres circunferencias análogas de centros C', B' y A' limitan entre ellos, en el interior del triángulo equilátero, una región triangular curvilínea de área S' tal que, si P es un punto interior a esa región, el triángulo formado por los segmentos PA, PB y PC es acutángulo.

Entonces, si el área del triángulo equilátero ABC es S, la probabilidad pedida es

$$p = \frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{3} - \pi/2}{\sqrt{3}/4} = 4 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

58. Sean a y b dos números enteros. Encuentra un polinomio de coeficientes enteros una de cuyas raices sea el número $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$.

Solución. La identidad

$$(m+n)(m^2 - mn + n^2) = m^3 + n^3$$

o bien

$$(m+n)\big((m+n)^2-3mn\big)=m^3+n^3,$$

nos da, poniendo $x=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ en el papel de $m+n$:

$$x(x^2-3\sqrt[3]{ab})=a+b,$$

es decir,

$$x^3-(a+b)=3\sqrt[3]{ab}\,x;$$

por consiguiente, la ecuación

$$\big(t^3-(a+b)\big)^3=27abt^3$$

tiene x como una de sus soluciones.

De manera que el siguiente polinomio con coeficientes enteros tiene al número $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ como una raiz:

$$\big(x^3-(a+b)\big)^3-27abx^3=x^9-3(a+b)x^6+3(a^2+b^2-7ab)x^3-(a+b)^3.$$

59. Se señalan nueve puntos sobre la superficie de un tetraedro regular de 10 cm de arista. Prueba que entre esos puntos tiene que haber dos situados a una distancia (en el espacio) no mayor que 5 cm.

Solución.

Dividamos la superficie del tetraedro $ABCD$ en 16 triángulos equiláteros congruentes de 5 cm de lado uniendo, sobre cada cara, los puntos medios de las aristas. Pintamos de Rojo los tres triángulos que comparten el vértice A, de Anaranjado los tres que comparten el vértice B, de Amarillo los tres que comparten el vértice C, de Verde los tres que comparten el vértice D y usamos otros cuatro colores diferentes para pintar cada uno de los cuatro triángulos interiores a las caras. De acuerdo con el principio del Palomar, al menos dos de los nueve puntos señalados pertenecerán a una misma de estas ocho regiones coloreadas.

Solo queda probar que si dos puntos pertenecen a una misma región (de cualquiera de los dos tipos) entonces la distancia entre ellos no puede ser mayor de 5 cm. Pero esto puede ser ya evidente.

60. Un autobús que recorre una ruta de 100 km está equipado con una computadora que predice el tiempo que le falta para llegar al destino final. Esta predicción se realiza sobre la hipótesis de que la velocidad media del bus en la parte restante de recorrido será la misma que la que ha conseguido en la parte de trayecto ya cubierta. Cuarenta minutos después de la salida del bus, la computadora predice un tiempo restante de una hora. Y esta predicción permanece constante durante las cinco horas siguientes. ¿Es posible que ocurra esto? En caso afirmativo, ¿cuántos km ha recorrido el bus al final de estas 5 horas y 40 minutos?

Solución.

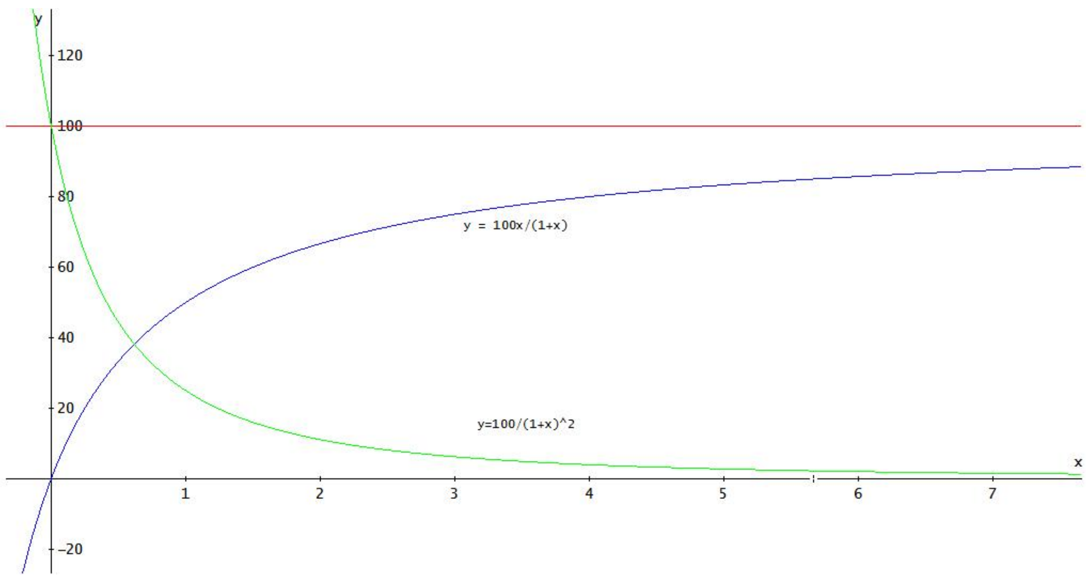
Vamos a llamar $S(t)$ a la distancia recorrida por el bus hasta el instante t. Si la situación descrita en el enunciado es posible, entonces para cada instante $t > 2/3$ (en horas) tendremos

$$\frac{100 - S(t)}{1} = \frac{S(t)}{t}\,,$$

o bien

$$S(t) = \frac{100t}{1+t}\,. \tag{1}$$

Para $t = 5\frac{2}{3}$ resulta $S = 85$ km. (La velocidad del bus en cada instante t sabemos que es $S'(t) = 100/(1+t^2)$; la velocidad en el instante $t = 5\frac{2}{3}$ es $S' = 2.25$ km/h. El bus va despacito, desde luego.)



Una tabla con valores de $S(t)$ y de $S'(t)$ que ilustra cuantitativamente las gráficas anteriores,

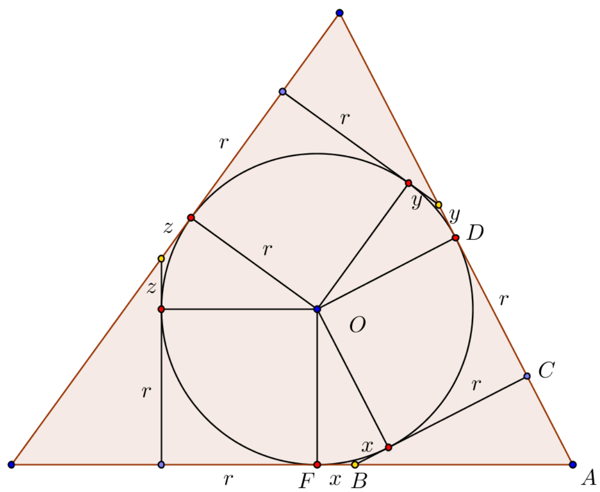
t	$S(t)$	$S'(t)$
1	50	25
2	66.7	11.11
3	75	6.25
4	80	4
5	83.3	2.78
5.67	85	2.25
6	85.7	2.04
7	87.5	1.56
8	88.9	1.23

nos hace ver que nuestro autobus nunca va a llegar a su destino (pues necesita un tiempo infinito para completar los 100 km, llegando a destino con velocidad cero.)

61. Tres rectas tangentes a la circunferencia inscrita a un triángulo acutángulo dividen el triángulo en tres triángulos rectángulos y un hexágono. El radio de la circunferencia inscrita es r y el perímetro del hexágono es q. Encuentra la suma de los diámetros de las circunferencias inscritas a los tres triángulos rectángulos en función de r y q.

Solución.

El hexágono que queda así construido queda dividido en seis cuadriláteros por los puntos de tangencia de su circunferencia inscrita y el centro de ésta. Es fácil darse cuenta de que tres de ellos son cuadrados de lado r. Entonces, el perímetro del hexágono es $q = 6r + 2x + 2y + 2z$, donde x, y y z son las longitudes de tangentes que se muestran en la figura.



Vamos a utilizar un hecho que ya hemos visto en problemas anteriores (repasar por ejemplo el n° 28 de la hoja 4): el diámetro del círculo inscrito en un triángulo rectángulo es igual a la suma de los catetos, menos la hipotenusa. Sea r_1 el radio del círculo inscrito en el triángulo rectángulo ABC (figura). Se tiene

$$2r_1 = AC + BC - AB = (AD - r) + (r + x) - (AF - x) = 2x + (AD - AF) = 2x.$$

De forma similar hallaremos que los diámetros de los otros dos círculos inscritos son $2y$ y $2z$. De manera que la suma que se pregunta es $2x + 2y + 2z = q - 6r$.

62. Un cuadrado 3×3 está relleno con los números a, b, c, d, e, f, g, h, i de la siguiente forma: $\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & i \\ \hline\end{array}$. Dado que el cuadrado es *mágico* (las sumas de los números de cada fila, de cada columna y de las dos diagonales son iguales), demuestra:

(a) $2(a + c + g + i) = b + d + f + h + 4e$.

(b) $2(a^2 + c^2 + g^2 + i^2) = b^2 + d^2 + f^2 + h^2 + 4e^2$.

(c) $2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3$.

Solución.

(a) Sea S la suma mágica. Entonces

$$(a+b+c)+(a+d+g)+(c+f+i)+(g+h+i) = 4S = 2(b+e+h)+2(d+e+f) \quad (1)$$

Restando $(b+d+f+h)$ a ambos lados ya conseguimos $2(a+c+g+i) = b+d+f+h+4e$.

(b) Empecemos notando que $a + i = c + g = b + h = d + f = S - e$. Combinando esto con la ecuación (1) anterior obtenemos $4(S - e) = 2(S - e) + 4e$; luego $S = 3e$. Queremos probar que

$$2(a^2 + c^2 + g^2 + i^2) = b^2 + d^2 + f^2 + h^2 + 4e^2. \tag{2}$$

Se tiene $a + c = S - b = h + e$, $c + i = S - f = d + e$, $g + i = S - h = b + e$, $a + g = S - d = f + e$. Además,

$$ac + ci + ag + gi = (a + i)(c + g) = (S - e)^2 = 2e(S - e) = e(b + d + f + h)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&2(a^2 + c^2 + g^2 + i^2) = \\
&(a + c)^2 + (c + i)^2 + (a + g)^2 + (g + i)^2 - 2(ac + ci + ag + gi) = \\
&(h + e)^2 + (d + e)^2 + (f + e)^2 + (b + e)^2 - 2e(b + d + f + h) = \\
&b^2 + d^2 + f^2 + h^2 + 4e^2
\end{aligned}$$

(c) Notemos que si esta propiedad enunciada en (c) se cumple para un cuadrado mágico, también se cumple para el cuadrado mágico que resulta al incrementar los números de las casillas de ese cuadrado en un mismo valor t. Porque se tiene, aplicando nuestra hipótesis:

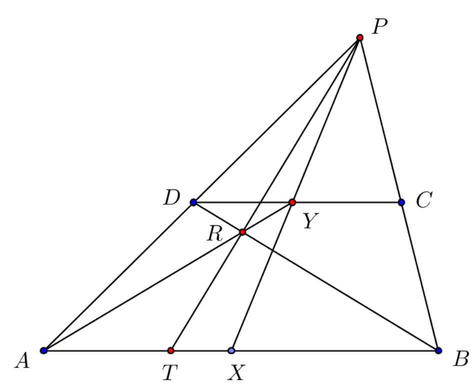
$$\begin{aligned}
&2((a + t)^3 + (c + t)^3 + (g + t)^3 + (i + t)^3) = \\
&2((a^3 + c^3 + g^3 + i^3) + 3t(a^2 + c^2 + g^2 + i^2) + 3t^2(a + c + g + i) + 4t^3) = \\
&b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3 + 3t(b^2 + d^2 + f^2 + h^2 + 4e^2) + 3t^2(b + d + f + h + 4e) + 8t^3 = \\
&(b + t)^3 + (d + t)^3 + (f + t)^3 + (h + t)^3 + 4(e + t)^3
\end{aligned}$$

De modo que bastaría con demostrar la propiedad (c) por ejemplo para un cuadrado mágico en el que $e = 0$ para tenerla probada en general. Pero en este caso la propiedad (c) se cumple trivialmente ($0 = 0$), ya que se tiene $a + i = c + g = b + h = d + f = 2e = 0$.

63. Sea $ABCD$ un trapecio de bases AB y CD. Sea X un punto del segmento AB. Sea $P = BC \cap AD$, es decir, el punto de intersección de las rectas BC y AD, y, análogamente, $Y = CD \cap PX$, $R = AY \cap BD$ y $T = PR \cap AB$. Prueba que

$$\frac{1}{AT} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{AB}.$$

Solución.



Aplicando el teorema de Menelao primero al $\triangle PAT$ cortado por la recta transversal BD y en segundo lugar al $\triangle PTX$ cortado por la recta transversal AY tenemos

$$\frac{PD}{DA} \cdot \frac{AB}{BT} \cdot \frac{RT}{PR} = 1$$

y

$$\frac{PR}{RT} \cdot \frac{AT}{AX} \cdot \frac{YX}{PY} = 1.$$

Multipliplicando estas dos ecuaciones y aplicando que $\dfrac{PD}{DA} \cdot \dfrac{YX}{PY} = 1$ por el teorema de Thales, resulta

$$\frac{AB}{AB - AT} = \frac{AX}{AT} \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{AT} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{AB}\,.$$