Seminario de problemas. Curso 2015-16. Hoja 8

43. Encuentra todas las parejas (a, b) de dígitos no nulos del sistema decimal (es decir, a, $b \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$) tales que el número cuya expresión decimal es ab, divide a todos los números cuyas expresiones decimales son $a0b$, $a00b$, $a000b$, $a0000b$,… ¿Cuánto valen los respectivos cocientes?

Solución A. El problema es equivalente a encontrar todas las parejas (a, b) de dígitos decimales no nulos tales que el número con expresión decimal ab divide a $90a$. En efecto, el que el número con expresión decimal ab divida al número con expresión decimal $a0b$, es claramente equivalente a que divida a $(100a+b)-(10a+b) = 90a$. Pero si el número con expresión decimal ab divide a $90a = (100a+b)-(10a+b)$, entonces también divide a $900a = (1000a+b)-(100a+b)$, y a $9000a = (10000a+b)-(1000a+b)$, y en general a la diferencia de entre dos términos consecutivos de la sucesión de números cuyas expresiones decimales son ab, $a0b$, $a00b$, $a000b$, $a0000b$,…, con lo que al dividir al primero, los divide a todos. Nótese además que si c es el cociente entre $90a$ y el número cuya expresión decimal es ab, entonces el cociente será claramente el número cuya expresión decimal es $cc \ldots c(c + 1)$. Supongamos entonces que $10a + b$ divide a $90a$, luego como $90a = 9(10a + b) - 9b$, entonces ab también divide a $9b$. Sea k el cociente de dividir el número de expresión decimal $a00 \ldots 0b$ entre el número de expresión decimal ab es $88 \ldots 89$, donde el número de 8's en el cociente es uno menos que el número de 0's en el dividendo.

- $k = 2$, con lo que $20a = 7b$. Como 7 y 20 son coprimos, 20 ha de dividir ab, imposible pues b es a lo sumo 9. No hay solución para este valor de k.
- $k = 3$, con lo que $30a = 6b$, o $b = 5a$. Luego 5 divide ab, y al ser b a lo sumo 9, $b = 5$ y $a = 1$. Como $90a = 90 = 6 \times 15 = 6ab$, entonces en este caso el cociente de dividir el número de expresión decimal $a00 \ldots 0b$ entre el número de expresión decimal $abes66 \ldots 67$, donde el número de 6's en el cociente es uno menos que el número de 0's en el dividendo.
- $k = 4$, con lo que $40a = 5b$, o $b = 8a$. Luego 8 divide ab, y al ser b a lo sumo 9, $b = 8$ y $a = 1$. Como $90a = 90 = 5 \times 18 = 5ab$, entonces en este caso el cociente de dividir el número de expresión decimal $a00 \ldots 0b$ entre el número de expresión decimal ab es $55 \ldots 56$, donde el número de 5's en el cociente es uno menos que el número de 0's en el dividendo.

Solución B. Empezando igual que en la solución anterior, hallaremos todas las parejas (a, b) de dígitos decimales no nulos tales que el número con expresión decimal ab divide a $90a$. Asumiremos sin pérdida de generalidad que a y b son coprimos; en efecto si a y b tienen un máximo común divisor $D > 1$, y u, v son tales que $a = Du$ y $b = Dv$, entonces el número con expresión decimal $a00\ldots0b$ es el resultado de multiplicar por D al número cuya expresión decimal es $u00\ldots0v$, luego podemos hallar todas las parejas (a, b) de dígitos decimales no nulos tales que el número con expresión decimal ab divide a $90a$, siendo además a, b coprimos, y luego multiplicarlas por todos los posibles enteros $D > 1$ tales que Da y Db sigan siendo dígitos decimales no nulos, para hallar todas las posibles parejas (Da, Db).

Como a y b son coprimos, entonces también lo son a y $10a+b$, luego si $10a+b$ divide a $90a$, entonces divide a 90. Los divisores de $90 = 2\times 32\times 5$ son 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 y 90, de los que 1, 2, 3, 5, 6 y 9 resultarían en $a = 0$, y 10, 30 y 90 en $b = 0$, quedando entonces que los posibles números cuya expresión decimal es ab cumpliendo las condiciones del problema son 15, 18 y 45, concluyéndose como en la solución anterior sin más que comprobar. Como en cada una de estas tres expresiones decimales hay un número mayor o igual que 5, elegir cualquier $D > 1$ resultaría en Da o Db mayor que 9, absurdo. Luego las soluciones con a y b coprimos son las únicas posibles, y no hay más que las tres halladas.

44. Dado un cuadrilátero $ABCD$, sean E, F, G y H los puntos medios respectivos de los lados AB, BC, CD, DA. Describe con el mayor grado de precisión los cuadriláteros ABCD para los que se cumple cada uno de los siguientes casos:

(a) $EFGH$ es un cuadrado.

(b) $EFGH$ es un rombo y $ABCD$ es cíclico (es decir, A, B, C yD están sobre una misma circunferencia).

(c) $EFGH$ es un cuadrado y $ABCD$ es cíclico.

Solución. Considérese el triángulo ABC. Al ser E yF los puntos medios respectivos de los lados AB y BC, por el teorema de Thales tenemos que la recta EF es paralela a la recta AC, y además la longitud del segmento EF es la mitad de la longitud del segmento AD. De la misma forma, el segmento GH es paralelo al segmento AC y la longitud del primero es la mitad de la longitud del segundo. Razonando de la misma forma para FG y HE, tenemos que $EFGH$ es un paralelogramo, cuyos lados son paralelos a las diagonales de $ABCD$, y tienen una longitud igual a la mitad de la longitud de la diagonal a la que son paralelos.

- Si $EFGH$ es un cuadrado, es un paralelogramo tal que sus lados tienen la misma longitud, y además son perpendiculares entre sí. Es decir, $ABCD$ es un cuadrilátero tal que sus diagonales AC y BD son perpendiculares y de la misma longitud. Nótese (ver dibujo con ejemplos) que en este caso $ABCD$ no es necesariamente convexo, pudiendo ser una de las dos diagonales externas al cuadrilátero, siempre y cuando mida lo mismo que la otra diagonal.
- Si $EFGH$ es un rombo, entonces las diagonales AC y BD han de tener la misma longitud. Por el teorema del seno, tenemos que $\angle A = 180° - \angle C$ y $\angle B = 180° - \angle D$ han de tener el mismo valor del seno, pues $2R \operatorname{sen} \angle A = BD = AC = 2R \operatorname{sen} \angle B$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita a $ABCD$. Es decir, bien $\angle B = \angle A$ con lo que $\angle C = \angle D$, bien $\angle B = 180° - \angle A = \angle C$ con lo que $\angle D = \angle A$. Deducimos entonces que $ABCD$ es un cuadrilátero tal que cada ángulo tiene exactamente un ángulo contiguo igual, y exactamente un ángulo contiguo con el que suma 180°, es decir $ABCD$ ha de ser un trapecio isósceles.

- Juntando los resultados de los dos casos anteriores, tenemos que $ABCD$ ha de ser un trapecio isósceles tal que sus diagonales son perpendiculares.

45. Sabes que el código que abre una caja fuerte es un número de 4 dígitos, que es además el mayor divisor primo de $3^{22} + 3$. No tienes calculadora, y no te acuerdas del código pero lo necesitas. ¿Cómo lo hallarías?

Solución. Podemos escribir que

$$\begin{aligned} 3^{22} + 3 &= 3(3^{21} + 1) \\ &= 3(3^7 + 1)(3^{14} - 3^7 + 1) \\ &= 3(3^7 + 1)(3^{14} + 2 \cdot 3^7 - 3 \cdot 3^7 + 1) \\ &= 3(3^7 + 1)((3^7 + 1)^2 - 3^8) \\ &= 3(3^7 + 1)(3^7 - 3^4 + 1))(3^7 - 3^4 + 1) \end{aligned}$$

Luego el mayor primo que divide a $3^{22} + 3$ no puede ser mayor que $3^7 + 3^4 + 1 = 2269$. Nos bastaría entonces con comprobar si 2269 es primo, cosa que podemos hacer dividiéndolo por todos los primos que son menores o iguales que su raíz cuadrada. Como $48^2 = 2304 > 2269$, nos basta con dividir por los primos desde 2 hasta 47 inclusive, y como ninguno de ellos divide a 2269, entonces 2269 es primo, y es el código buscado.

46. Determinar si existe un entero k para el que se cumpla la siguiente igualdad

$$\sqrt{2016} - \sqrt{2015} = \sqrt[2016]{k - \sqrt{k^2 - 1}}.$$

Nótese en primer lugar que

$$(\sqrt{2016} + \sqrt{2015})(\sqrt{2016} - \sqrt{2015}) = 1$$

y que

$$= \sqrt[2016]{k - \sqrt{k^2 - 1}}\,\sqrt[2016]{k + \sqrt{k^2 - 1}} = \sqrt[2016]{k - (k^2 - 1)} = \sqrt[2016]{1} = 1,$$

con lo que, si k cumple las condiciones del enunciado,

$$\sqrt{2016} + \sqrt{2015} = \frac{1}{\sqrt{2016} - \sqrt{2015}} = \frac{1}{\sqrt[2016]{k - \sqrt{k^2 - 1}}} = \sqrt[2016]{k + \sqrt{k^2 - 1}}$$

y elevando a la potencia 2016 la igualdad dada y esta última, tenemos

$$(\sqrt{2016} - \sqrt{2015})^{2016} = k + \sqrt{k^2 - 1}$$
$$(\sqrt{2016} + \sqrt{2015})^{2016} = k + \sqrt{k^2 - 1}.$$

Por tanto

$$k = \frac{k + \sqrt{k^2 - 1}}{2} + k - \sqrt{k^2 - 1} = \frac{(\sqrt{2016} - \sqrt{2015})^{2016} + (\sqrt{2016} - \sqrt{2015})^{2016}}{2}$$

y nos bastaría con comprobar si esta última expresión es entera o no. Para ello, recordemos que, de acuerdo a la fórmula del binomio de Newton,

$$(\sqrt{2016} \pm \sqrt{2015})^{2016} = \sum_{n=0}^{2016} (\pm 1)^{2016} \binom{2016}{n} (\sqrt{2016})^n (\sqrt{2015})^{2016-n}.$$

Ahora bien, para los términos en los que n es par, la contribución al sumatorio del binomio con signo + es igual en valor absoluto, y de signo opuesto, a la contribución al sumatorio del binomio con signo -, con lo que ambas se cancelan. Nos basta entonces tomar los valores pares de n, es decir, sustituir $n = 2m$, tomando m desde 0 hasta 1008, con lo que

$$k = \sum_{m=0}^{1008} \binom{2016}{2m} (2016)^m (2015)^{1008-m}.$$

que es claramente entero ya que cada término del sumatorio es entero por ser producto de un número combinatorio (que es claramente entero) por dos potencias de enteros con exponente entero no negativo.

47. Un profesor de matemáticas tiene una clase con 10 alumnos, y les pone el siguiente examen: los alumnos se pondrán en fila, y a cada uno le pondrá un sombrero en la cabeza. Cada sombrero puede ser de uno de dos colores, blanco o rojo. Cada uno puede ver los colores de los sombreros de los que tiene delante en la fila, pero no puede ver ni el color de su propio sombrero, ni el color de los que tiene detrás en la fila. Cada uno de los alumnos va diciendo un color, "blanco" o "rojo" por turno, empezando desde el último de la fila, luego el penúltimo, y así hasta llegar al primero. Cada alumno de la fila puede oír todas las respuestas previas (es decir, las respuestas de todos los que están detrás suyo en la fila). Por cada alumno que dice el color del sombrero que lleva, el profesor da un punto. La nota final de cada alumno de la clase es la suma de aciertos. El profesor deja que los alumnos hablen entre ellos y diseñen una estrategia antes de ponerse en fila, pero luego no pueden hablar entre ellos, sólo esperar a que les ponga el sombrero a todos, y luego decir "blanco" o "rojo" cuando llegue su turno. Demuestra que los alumnos tienen una estrategia que les permite asegurarse una nota de 9.

Nota. no se admiten estrategias que dependan de decir "blanco" o "rojo" más suave o más fuerte, cambiando el acento, etc. Los alumnos han de decir el color en un tono neutro, que no dé más información que el propio color. Si los alumnos hacen trampa, el profesor les pone un 0 a todos.

Solución. Como el último alumno de la fila ve 9 sombreros (no ve el suyo propio), entonces habrá un color del que vea un número par de sombreros, y un color del que vea un número impar de sombreros. Los alumnos pueden haberse puesto de acuerdo inicialmente en que dirá el color del que vea un número par de sombreros; supongamos sin pérdida de generalidad que dice "blanco" (la solución sería idéntica intercambiando los colores si dijera rojo). El penúltimo sabe entonces que hay un número par de sombreros blancos desde el principio de la fila hasta el suyo inclusive. Entonces:

- Si ve un número par de sombreros blancos delante suya, el suyo ha de ser rojo. El alumno dice entonces "rojo" y obtiene 1 punto para la clase. Los alumnos que están delante de él en la fila saben además que, hasta el 8° alumno de la fila incluido (el siguiente en hablar), hay un número par de sombreros blancos.
- Si ve un número impar de sombreros blancos, el suyo ha de ser blanco. El alumno dice entonces "blanco" y obtiene 1 punto. Los alumnos que están delante de él en la fila saben además que, hasta el 8° alumno de la

fila incluido (el siguiente en hablar), hay un número impar de sombreros blancos.

Continuando de esta forma, cada alumno sabe, al llegar el turno de un cierto alumno en la fila, si el número de sombreros blancos, desde el principio de la fila hasta dicho alumno inclusive, es par o impar. Si este alumno ve la misma paridad de sombreros blancos delante suya, su sombrero es rojo, y si ve la paridad opuesta, su sombrero es blanco. En ambos casos dice el color que sabe que tiene su sombrero, consigue un punto para la clase, y en el primer caso el resto de los alumnos sabe que la paridad no ha cambiado, y en el segundo caso que sí ha variado. De esta forma, se garantiza que todos los alumnos, salvo el primero, sepan a ciencia cierta el color del sombrero que tienen en la cabeza, y lo puedan decir, asegurándose la nota de 9 para toda la clase.

48. Dado un triángulo ABC, sea M el punto medio del lado BC, y sea H el ortocentro de ABC. Sea N el simétrico del punto H respecto del punto M. Demuestra que N está sobre la circunferencia circunscrita a ABC.

Solución A. Es relativamente conocido, pero lo demostraremos aquí, que el simétrico de H respecto de la recta BC está sobre la circunferencia circunscrita a ABC. Consideremos que, como al menos uno de los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ es agudo, entonces podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\angle C$ es agudo (en caso contrario nos bastaría con cambiar los nombres B y C, ya que el problema no varía al realizar este cambio). Nótese que $\angle CBH = 90° - \angle C = \angle CAH$. Luego si prolongamos la recta AH hasta que corte de nuevo a la circunferencia circunscrita a ABC en el punto P, entonces $\angle CBP = \angle CAP = \angle CAH = \angle CBH$, y las rectas BH y BP son simétricas respecto de la recta BC. Pero la recta AH es perpendicular a la recta BC, con lo que el simétrico de H respecto de BC, que está sobre la recta AH, también está sobre la recta BP, y al cortarse ambas en P, resulta que P es dicho punto simétrico, y está sobre la circunferencia circunscrita a ABC.

Consideremos ahora la recta PN. Como N es el simétrico de H respecto de M, está a la misma distancia que H respecto de BC, sólo en al otro lado de BC. Otro tanto le sucede al punto P, luego el segmento PN es paralelo al segmento BC, luego perpendicular al segmento PH. Se tiene entonces que el triángulo NPH es rectángulo en P, luego el punto medio de NH (que por construcción es claramente M) es su circuncentro. La mediatriz de PN es entonces perpendicular a PN, luego a BC, y pasa por el punto medio M del lado BC, y por lo tanto por el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Como el circuncentro de ABC está sobre la mediatriz de PN, y la circunferencia circunscrita pasa también por P, entonces también pasa por N, como queríamos demostrar.

Solución B. Llamemos M' y M'' a los puntos medios respectivos de CA y AB. El triángulo $MM'M''$ es entonces homotético al triángulo ABC, y las rectas AM, BM' y CM", que son las medianas de ABC, se cortan en el baricentro G de ABC. Nótese que las alturas de $MM'M''$ son las mediatrices de ABC, ya que son respectivamente perpendiculares a M'M", M"M y MM', que son a su vez paralelas a BC, CA y AB, y a la vez pasan por los puntos M, M' y M'', que son los puntos medios de BC, CA y AB. Luego el circuncentro de ABC es el ortocentro de $MM'M''$. Ahora bien, como G es el centro de una homotecia que transforma ABC en $MM'M''$, y tal que $GA = 2GM$, $GB = 2GM'$ y $GC = 2GM''$, entonces $GH = 2GO$, estando G

en el interior del segmento OH. Si llamamos N al circuncentro de $MM'M''$, resulta que $GO = 2GN$, estando G en el interior del segmento ON. Luego $NH = GH - GN = 2GO - GN = GO + GN = ON$, y N es el punto medio de OH. Por lo tanto, existe una segunda homotecia, con centro H y factor de escala $1/2$, que transforma O en N, y por lo tanto transforma la circunferencia circunscrita a ABC en la circunferencia circunscrita a $MM'M''$. Existe entonces un punto P sobre la circunferencia circunscrita a ABC tal que, al aplicarle esta homotecia, se transforma en M, siendo entonces M el punto medio de HP, y por lo tanto P el simétrico de H respecto de M, como queríamos demostrar. Nota: Esta solución parece compleja de hallar, pero puede ser sin embargo sencilla para aquellos que conozcan el círculo de los 9 puntos y la demostración de su existencia y propiedades. En efecto, una vez hemos demostrado que la circunferencia circunscrita a MM'M" es el resultado de aplicar una homotecia con centro H y factor de escala 1/2 a la circunferencia circunscrita a ABC, es obvio que los puntos medios de HA, HB y HC también están sobre la circunferencia circunscrita a $MM'M''$. Finalmente, como los puntos simétricos de H con respecto a las rectas BC, CA y AB están sobre la circunferencia circunscrita a ABC, los pies de las alturas, que son los puntos medios de los segmentos entre H y estos tres puntos simétricos, también están en la circunferencia circunscrita a $MM'M''$, que por lo tanto pasa por estos 9 puntos.