

- 50.** Prueba que existen infinitos números racionales r tales que $\sqrt{r}$ y $\sqrt{r+1}$ son números racionales.

Solución. Sea r un número racional de manera que también $\sqrt{r}$ es racional. Entonces, podemos poner

$$r = \frac{n^2}{k^2}.$$

Los valores de n y k los elegiremos convenientemente con el fin de que

$$r + 1 = \frac{n^2 + k^2}{k^2}$$

sea a su vez un cuadrado perfecto. Para ello, podemos elegir n y k verificando $n^2 = 2k + 1$, por lo que n tiene que ser impar. Por tanto, por cada n impar que elijamos, habrá un k para el que los números racionales

$$r = \frac{n^2}{k^2} = \frac{2k + 1}{k^2}, \quad r + 1 = \frac{n^2 + k^2}{k^2} = \frac{k^2 + 2k + 1}{k^2} = \frac{(k + 1)^2}{k^2},$$

verifican que $\sqrt{r}$ y $\sqrt{r+1}$ son racionales. Por ejemplo, si $n = 3$ se tiene $k = 4$ y $r, r + 1$ son

$$r = \frac{9}{16}, \quad r + 1 = \frac{25}{16}.$$

Podríamos haber resuelto el problema mediante ternas pitagóricas. Así, tomando $r = \frac{n^2}{k^2}$, buscamos que $n^2 + k^2 = h^2$, por lo que los números n, k y h forman una terna pitagórica. Así, si $a > b$ son números naturales, podemos tomar $n = a^2 - b^2$, $k = 2ab$ y $h = a^2 + b^2$, lo que nos asegura que n, k y h forman una terna pitagórica.

- 51.** Encuentra todas las parejas de números naturales (m, n) tales que

$$m!n! = m! + n!$$

Solución.

Dividamos toda la ecuación por $m!n!$, con lo que resulta

$$1 = \frac{1}{n!} + \frac{1}{m!}.$$

Como m y n son mayores o iguales que 1, la única solución posible a la ecuación anterior es que $m = n = 2$.

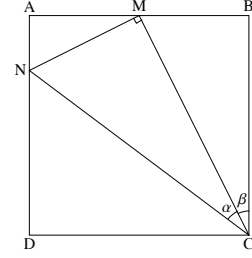
Se puede llegar al mismo resultado reorganizando los términos de la ecuación. En efecto,

$$m!n! = m! + n! \Rightarrow m!n! - m! - n! - 1 = 1 \Rightarrow (m! - 1)(n! - 1) = 1,$$

y como se trata de números naturales, la única solución posible es $m! = n! = 2$, es decir $m = n = 2$.

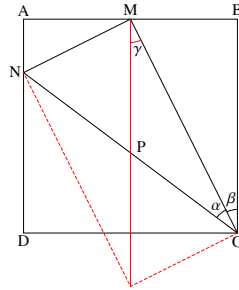
52. En un cuadrado $ABCD$ de lado 1, M es el punto medio del lado AB y N la intersección de la perpendicular a MC por M con el lado AD .

1. Prueba que los ángulos α y β son iguales.
2. Calcula el perímetro del triángulo CDN .



Solución.

Tracemos la perpendicular por M al lado DC , que corta a CN en P . Es evidente que P es el punto medio de CN . Si consideramos MN y CM como los lados de un rectángulo, CN es una diagonal y la recta que pasa por M y por P es la otra.



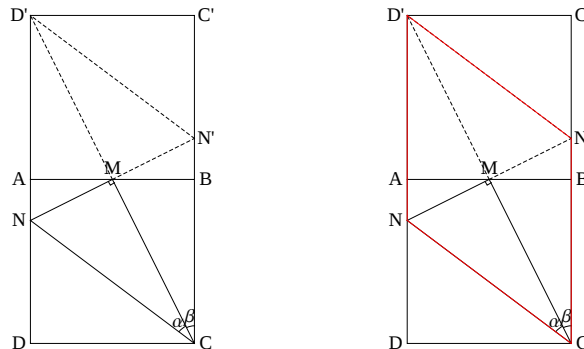
Por tanto, $CP = PM$ y el triángulo CPM es isósceles y los ángulos α y γ son iguales. Por otra parte, los ángulos β y γ son iguales por ser alternos internos. Así pues, se tiene $\alpha = \beta$.

Para probar la segunda parte, observamos que los triángulos CBM y AMN son semejantes, pues sus ángulos son iguales. Además, es inmediato ver que el triángulo AMN tiene lados que son la mitad de los de CBM , por lo que se tiene

$$AN = \frac{1}{4} \Rightarrow DN = \frac{3}{4}.$$

Como $CN^2 = DN^2 + CD^2 = DN^2 + 1$, se sigue que $CN = \frac{5}{4}$ (obsérvese que es la pareja de fracciones aparecida en el problema 50) y, por tanto, el perímetro del triángulo CDN es igual a 3.

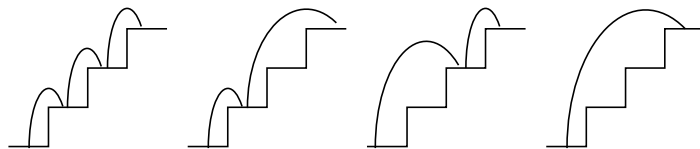
Se pueden probar los dos apartados de una sola vez, haciendo una reflexión de la figura respecto al lado AB .



Se observa que $CD'N'C$ es un rombo, por lo que es inmediato que $\alpha = \beta$. Por otra parte, $CN = ND'$ y, por tanto, el perímetro del triángulo CDN es igual a

$$CD + DN + CN = CD + DN + ND' = CD + DD' = 3CD = 3.$$

- 53.** Una escalera de tres peldaños puede subirse de cuatro maneras distintas, como se muestra en la siguiente figura.



¿De cuántas maneras distintas puede subirse una escalera de 10 peldaños? En general, ¿de cuántas maneras puede subirse una escalera de n peldaños?

Solución.

Llamemos T_k al total de maneras de subir una escalera de k peldaños y preguntémonos si es posible calcular de cuántas formas puede subirse una escalera de n peldaños sabiendo la solución para escaleras de menos peldaños. Para ello vamos a fijarnos en el último paso. Si este paso abarca todos los peldaños solo podemos subir de una forma. Si el último paso es desde el primer peldaño hasta el último, primero habremos tenido que llegar de todas las formas posibles al primer peldaño. En general, si el último paso es desde el escalón k hasta el último, previamente habremos tenido que llegar al escalón k , por lo que

$$T_n = 1 + T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-1}. \quad (1)$$

Esta relación, que se llama de recurrencia, es válida para cualquier número de peldaños. En concreto también es cierta para escaleras de $n - 1$ peldaños, por lo que tenemos

$$T_{n-1} = 1 + T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-2}. \quad (2)$$

Restando las ecuaciones (1) y (2) resulta

$$T_n - T_{n-1} = T_{n-1} \Rightarrow T_n = 2T_{n-1}.$$

Como es evidente que $T_1 = 1$, se obtiene fácilmente que $T_n = 2^{n-1}$.

Podríamos haber llegado al mismo resultado haciendo una conjetura y probándola por inducción. Es muy fácil calcular los primeros valores de T_n . De hecho tenemos

$$T_1 = 1, \quad T_2 = 2, \quad T_3 = 4.$$

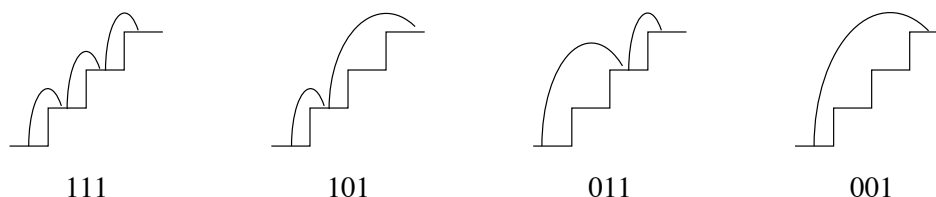
De aquí parece deducirse que los valores de T_k son potencias de 2, por lo que podemos conjeturar que $T_k = 2^{k-1}$. Si suponemos que la hipótesis (o conjetura) es cierta para todos los valores de T_k desde 1 hasta $n - 1$, con $n > 1$, a partir de (1) se tiene

$$T_n = 1 + 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-2}.$$

Multiplicando esta expresión por 2 y restando, se llega sin dificultad a que $T_n = 2^{n-1}$. Así, podemos concluir que $T_n = 2^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.

Una vez conocido el resultado, sabemos que cada manera de subir una escalera de $n - 1$ peldaños da lugar a dos maneras diferentes de subir una de n peldaños. Una de esas maneras es obvia, una vez subidos $n - 1$ peldaños, subimos un escalón más y hemos subido una escalera de n peldaños. Es decir, de esta forma contamos todas las maneras de subir los n peldaños cuando el último paso abarca un solo escalón. Para el resto, basta con aumentar en un escalón el último paso de una escalera de $n - 1$ peldaños.

Podemos probar lo mismo de manera directa, asignando una codificación binaria a cada manera de subir la escalera. A cada manera diferente de subir la escalera le asignamos una lista de n ceros y unos, donde un uno significa que hemos pisado el correspondiente escalón y un cero que no lo hemos pisado. Como siempre pisamos el último escalón, todas las secuencias acabarán en 1. Como ejemplo, veamos cómo sería la codificación para cada una de las cuatro maneras de subir una escalera de tres peldaños.



Podemos ver entonces que hay tantas maneras de subir una escalera de n peldaños como secuencias de $n - 1$ ceros y unos (el último número de la secuencia siempre es 1). Pero el número de tales secuencias es igual a 2^{n-1} (2 opciones para la primera posición, dos para la segunda, dos para la tercera, ..., luego en total $2 \times 2 \times \cdots \times 2$, $n - 1$ veces).

- 54.** Prueba que si n es un número entero positivo tal que $2n + 1$ y $3n + 1$ son cuadrados perfectos, entonces n es divisible por 40.

Solución.

Como $2n + 1$ es un número impar y un cuadrado perfecto, sabemos que existirá un entero positivo k verificando

$$2n + 1 = (2k + 1)^2 \Rightarrow n = 2k(k + 1),$$

por lo que n es un número par. Por tanto, $3n + 1$ es impar y, al ser un cuadrado, existirá un entero no positivo j de manera que

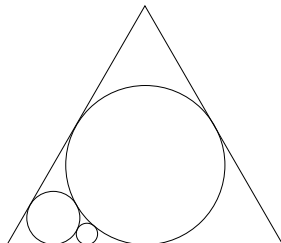
$$3n + 1 = (2j + 1)^2 \Rightarrow 3n = 4j(j + 1).$$

Puesto que o bien j o bien $j + 1$ es un número par, se sigue que n es múltiplo de 8. Para ver que n es múltiplo de 40, faltaría por ver que n es múltiplo de 5. Ahora bien, si un número es un cuadrado, entonces es congruente con 0, 1, 4, módulo 5. Si hacemos una tabla de congruencias para n , $2n + 1$ y $3n + 1$ resulta

$n \equiv 0 \pmod{5}$	$\Rightarrow$	$2n + 1 \equiv 1 \pmod{5},$	$3n + 1 \equiv 1 \pmod{5}$
$n \equiv 1 \pmod{5}$	$\Rightarrow$	$2n + 1 \equiv 3 \pmod{5},$	$3n + 1 \equiv 4 \pmod{5}$
$n \equiv 2 \pmod{5}$	$\Rightarrow$	$2n + 1 \equiv 0 \pmod{5},$	$3n + 1 \equiv 2 \pmod{5}$
$n \equiv 3 \pmod{5}$	$\Rightarrow$	$2n + 1 \equiv 2 \pmod{5},$	$3n + 1 \equiv 0 \pmod{5}$
$n \equiv 4 \pmod{5}$	$\Rightarrow$	$2n + 1 \equiv 4 \pmod{5},$	$3n + 1 \equiv 3 \pmod{5}$

por lo que la única forma de que $2n + 1$ y $3n + 1$ sean cuadrados perfectos es que n sea múltiplo de 5. De aquí se sigue que n es múltiplo de 40, por ser múltiplo de 8 y de 5.

- 55.** Las tres circunferencias de la figura son tangentes entre sí y tangentes a los lados de un triángulo equilátero de lado uno. Calcula los radios de las tres circunferencias.



Solución.

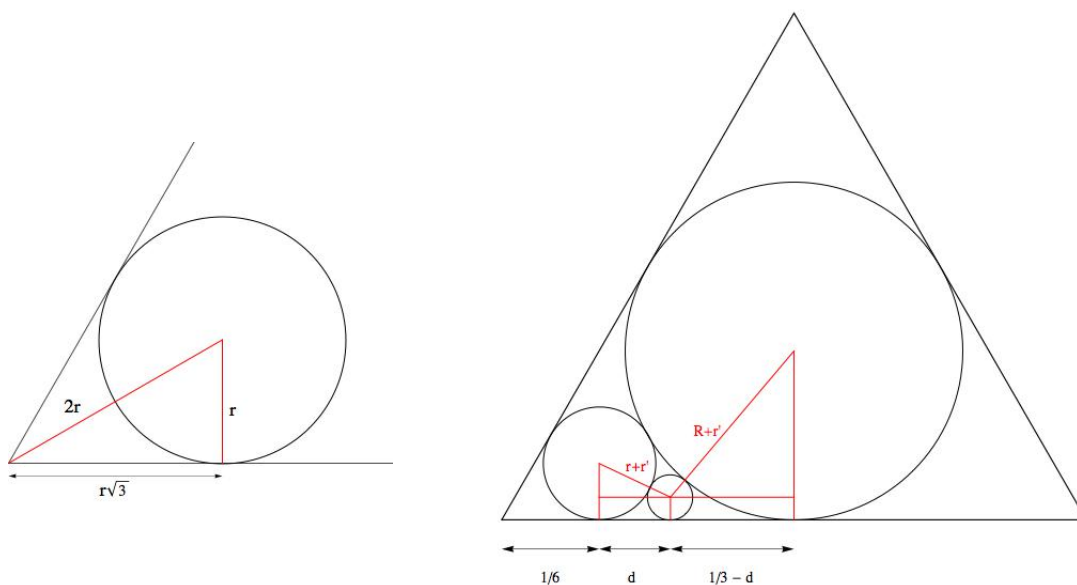
Llamemos R al radio de la circunferencia de mayor radio, que es la circunferencia inscrita al triángulo equilátero. Es sabido que el radio de esta circunferencia es la tercera parte de la altura del triángulo. Como el lado del triángulo es igual a 1, entonces

$$R = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

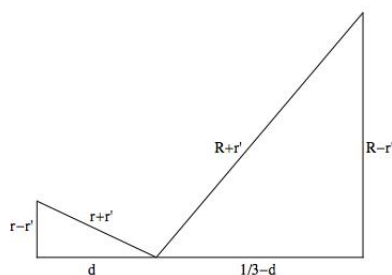
Es evidente que la circunferencia que es tangente a dos lados del triángulo es la tercera parte de la primera, ya que si trazamos una tangente a la circunferencia inscrita paralela al lado de la derecha, obtenemos un triángulo equilátero que es la tercera parte del primero y esta circunferencia es la circunferencia inscrita. Por tanto, si llamamos r al radio, resulta

$$r = \frac{R}{3} = \frac{1}{6\sqrt{3}}.$$

Ya solo nos falta hallar el radio de la tercera circunferencia. Para ello nos ayudamos de las siguientes figuras



de las que se obtienen los siguientes triángulos rectángulos



Aplicando el teorema de Pitágoras, llegamos a la siguiente pareja de ecuaciones

$$\begin{cases} d^2 = (r + r')^2 - (r - r')^2 = 4rr', \\ (1/3 - d)^2 = (R + r')^2 - (R - r')^2 = 4Rr'. \end{cases} \quad (3)$$

Si las dividimos resulta

$$\frac{(1/3 - d)^2}{d^2} = \frac{R}{r} = 3 \Rightarrow \frac{1/3 - d}{d} = \sqrt{3} \Rightarrow d = \frac{1}{3(1 + \sqrt{3})}.$$

Llevando este resultado al primera de las ecuaciones (3) obtenemos

$$r' = \frac{d^2}{4r} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{12}.$$

- 56.** Se tienen 2014 conjuntos, cada uno con 44 elementos. Cada dos conjuntos tienen en común exactamente un elemento. Prueba que los 2014 conjuntos tienen un elemento en común.

Solución Consideremos un conjunto cualquiera A . Por el principio del palomar, de los 2013 conjuntos restantes habrá al menos 46 que comparten el mismo elemento, llamémosle a , con A , ya que A tiene 44 elementos y $2013/44 = 45.75$. Denotemos estos conjuntos por $A_1, A_2, \dots, A_{46}$ y supongamos que existe un conjunto B que no comparte con A el elemento a , sino otro distinto, es decir $a \notin B$. Como este conjunto tiene 44 elementos y comparte con cada uno de los 46 A_k un elemento, nuevamente por el principio del palomar habrá dos conjuntos A_i y A_j que comparten con B el mismo elemento. Pero como A_i y A_j comparten el elemento a y el elemento que comparten dos conjuntos es solo uno, éste debe ser el que comparten con B , pero esto no puede ser, ya que a no pertenece a B . Por tanto, todos los conjuntos comparten el mismo elemento a .