Seminario de problemas. Curso 2014-15. Hoja 7

43. Encontrar todos los números naturales de tres cifras con la suma de sus cifras igual a 5 en cada uno de los casos:

a) No contienen ningún 0.

b) Pueden contener algún 0.

En cada caso, encontrar el menor de dichos números.

Solución.

Apartado a). Los números pedidos han de contener las cifras $1, 1$ y 3 o $2, 2$ y 1. Dadas tres cifras a, a y b no nulas, se pueden formar 3 números diferentes de tres cifras con ellas. De este modo, hay 6 números naturales de tres cifras con la suma de sus cifras igual a 5 y ninguna de ellas es 0. El menor de dichos números es el 113.

Apartado b). Las posibilidades de formar tales números incluyen las del apartado a), y los números que se pueden formar con las cifras $0, 1, 4$ o $0, 2, 3$ o $0, 0, 5$. Con este último caso solo se puede formar un número. Con tres cifras $0, a, b$ se pueden formar 4 números de tres cifras. En total, hay $6 + 4 + 4 + 1 = 15$ números naturales de tres cifras con la suma de sus cifras igual a 5, pudiendo contener algún 0. El menor de dichos números es el 104.

44. Demostrar que

a) Si $ab > 0$, entonces $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

b) Si $ab < 0$, entonces $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$.

Solución

De la desigualdad $(x-1)^2 \geq 0$ o, equivalentemente, $x^2+1 \geq 2x$, se sigue inmediatamente

$$\frac{x^2+1}{x} \geq 2, \quad x > 0.$$

La igualdad se tiene cuando $x = 1$.

Análogamente, de $(x+1)^2 \geq 0$ o, equivalentemente, $x^2 + 1 \geq -2x$, obtenemos

$$\frac{x^2+1}{x} \leq -2, \quad x < 0.$$

La igualdad se tiene cuando $x = -1$. Finalmente, tomando $x = a/b$ en las desigualdades anteriores se demuestra lo que se quería.

Una demostración alternativa se puede obtener encontrando el máximo y el mínimo de la función $f(x) = x + 1/x$.

45. Sean $a > 1$, $b < 1$. Demostrar que $a + b > 1 + ab$.

Solución

En primer lugar, es evidente que $a - 1 > 0$ y $1 - b > 0$. Se tiene entonces que

$$a + b - 1 - ab = a(1 - b) + b - 1 = (a - 1)(1 - b) > 0.$$

46. Demostrar la desigualdad entre medias

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

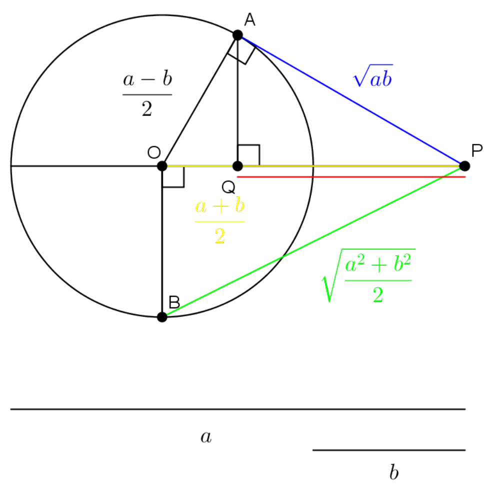
es decir,

$$HM \le GM \le AM \le QM,$$

donde HM es la "harmonic mean", GM es la "geometric mean", AM es la "arithmetic mean" y QM es la "quadratic mean".

Solución

La solución nos la da la siguiente figura



y un poco de explicación. Sean a y b como en el dibujo. El radio de la circunferencia es entonces $\frac{a-b}{2}$. Por otro lado, por la potencia del punto P a la circunferencia, se tiene que

$$\overline{PA} \cdot \overline{PA} = ab,$$

de donde $\overline{PA} = \sqrt{ab} = GM$.

Además, en el triángulo rectángulo AOP, se tiene que

$$\overline{OP} = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2} = AM,$$

y de aquí se deduce que

$$GM \le AM.$$

Por otro lado, en ese mismo triángulo, por el teorema del cateto, tenemos que $ab = \frac{a+b}{2} \cdot \overline{PQ}$, de donde

$$\overline{PQ} = \frac{2ab}{a+b} = HM.$$

De este modo, deducimos que

$$HM \le GM.$$

Por último, en el triángulo OBP, por el teorema de Pitágoras, obtenemos que

$$\overline{BP} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = QM.$$

De aquí, observamos que

$$AM \leq QM$$

y ya hemos terminado.

Las igualdades se dan cuando $a = b$ (geométricamente se corresponde con un triángulo degenerado).

47. Sea n un número entero. Demuestra que el número $n^5 - 5n^3 + 4n$ es divisible por 120. Y que, si n es par, el número $n^3 - 4n$ es siempre divisible por 48.

Solución

Factorizamos la primera expresión:

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^2 - 5n^2 + 4) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2),$$

es decir, tenemos el producto de cinco números enteros consecutivos. En la factorización de cinco números consecutivos siempre podemos encontrar un múltiplo de 2, otro de 3, otro de 4, y otro de 5, todos ellos diferentes. Por otro lado, $120 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. De aquí se concluye la primera parte.

Para la segunda parte, factorizando, se tiene que

$$n^3 - 4n = n(n^2 - 4) = (n-2)n(n+2),$$

y se sabe que n es par, con lo que tenemos el producto de tres números pares consecutivos. Pero en la factorización de tres números pares consecutivos siempre podemos encontrar dos múltiplos de 2, uno de 4 y uno de 3. Como $48 = 2^4 \cdot 3$, concluimos la segunda parte.

48. Sean a, b números positivos. Demostrar que

$$(a+b)\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

Solución

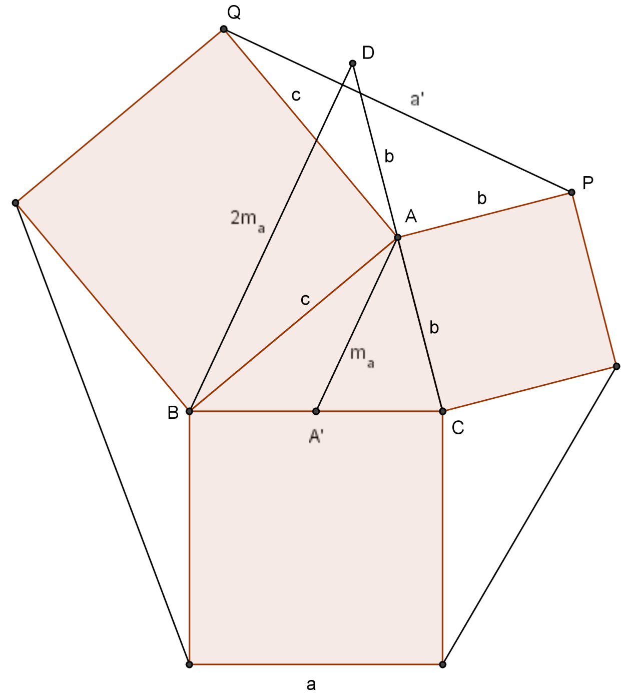
Se tiene que $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ y

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2}{2}} \geq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2},$$

por las desigualdades entre medias. Multiplicando las desigualdades precedentes se obtiene la desigualdad requerida. La igualdad se tiene cuando $a = b$.

49. Sobre cada uno de los lados de un triángulo se construye un cuadrado (hacia el exterior del triángulo). Los seis vértices de estos tres cuadrados que no coinciden con alguno de los vértices del triángulo forman un hexágono. Tres de los lados de este hexágono son iguales a los correspondientes lados del triángulo. Demuestra que cada uno de los tres lados restantes es igual al doble de una de las medianas del triángulo.

Solución



Sea A' el punto medio del lado BC del triángulo ABC. Trazar por B una paralela a la mediana AA', que corta en D a la prolongación del lado CA. Los triangulos ABD y AQP son iguales por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido. Luego los otros lados son iguales, $a' = PQ = 2m_a$.