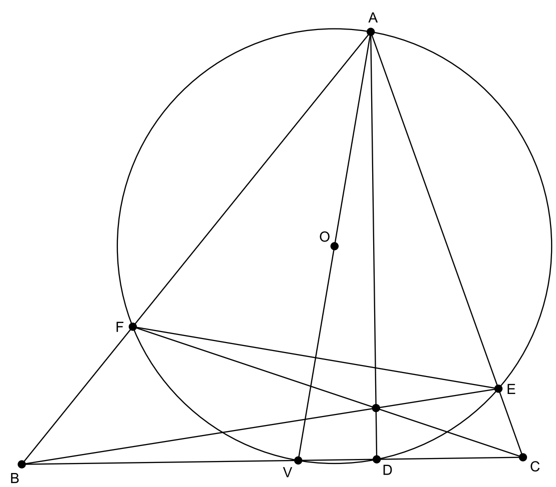
Seminario de problemas. Curso 2015-16. Hoja 5

25. En un triángulo acutángulo ABC, con $AB \neq AC$, sea V la intersección de la bisectriz de A con BC y sea D el pie de la altura desde A a BC. Si E y F son las intersecciones de la circunferencia circunscrita a AVD con CA y AB, respectivamente, mostrar que las rectas AD, BE y CF son concurrentes.

Solución.



Gracias al Teorema de Ceva, para demostrar el enunciado bastará probar que

$$\frac{AF}{BF}\,\frac{BD}{DC}\,\frac{CE}{AE} = 1.$$

Como $\angle ADV$ es recto, AV es un diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo AVD.

Como AV es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ $(= \angle FAE)$, se tiene que la igualdad de los arcos $\overset{\frown}{FV}=\overset{\frown}{EV}$ y también de los arcos $\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{AE}$ y, por tanto, de las cuerdas correspondientes $AF = AE$.

Por tanto, basta probar que

$$\frac{BF}{BD} = \frac{CE}{DC}.$$

Por otra parte, usando potencias tenemos que $BF \cdot BA = BV \cdot BD$. De igual forma, $CE \cdot CA = CD \cdot CV$. Luego es suficente probar que

$$\frac{BV}{BA} = \frac{CV}{CA}.$$

Esta última igualdad es consecuencia del Teorema de la bisectriz.

26. Hallad las cuatro últimas cifras de 3^{2004}.

Solución. Las 4 últimas cifras son el resto al dividir por 10^4.

Notamos que al sumar, o restar a un número un múltiplo de 10^4 su resto no varía.

Notamos que si dos números tienen el mismo resto, al multiplicarlos por un tercero, obtenemos dos con el mismo resto.

Manipulando el número objeto del problema,

$$m := 3^{2004} = 9^{1002} = 9^2 \cdot 9^{1000} = 81 \cdot (10-1)^{1000}.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} n := (10-1)^{1000} = 10^{1000} - 1000 \cdot 10^{1000} + \binom{1000}{2} 10^{9999} - \binom{1000}{3} 10^{9998} \\ + \cdots + \binom{1000}{4} 10^4 - \binom{1000}{3} 10^3 + \binom{1000}{2} 10^2 - 1000 \cdot 10 + 1. \end{aligned}$$

Por tanto n tiene resto 1.

Concluimos que m tiene el mismo resto que 81. O sea, las 4 últimas cifras de m son $\boxed{81}$.

27. Con 21 fichas de damas, unas blancas y otras negras, formamos un rectángul 3×7. Demostrad que siempre hay 4 fichas del mismo color situadas en los vértices de un rectángulo.

Solución. Como $3 > 2$, por el principio del palomar, en cada columna hay o bien 2 fichas blancas o 2 fichas negras. Llamamos color de la columna al color de esas 2 fichas, y vinculamos a esa columna el conjunto de 2 elementos que se obtiene al seleccionar esas dos filas en las que hay 2 fichas del mismo color.

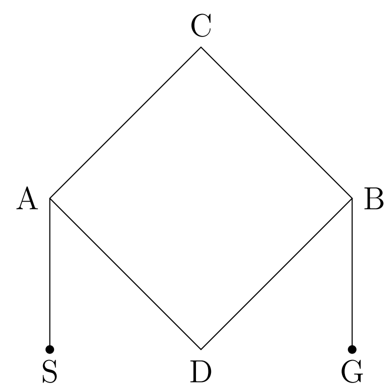
Como $7 > 6 = 3 \times 2$, por el principio del palomar, hay $3 + 1 = 4$ columnas del mismo color.

Existen 3 posibles formas de elegir 2 filas en un conjunto de 3 filas. Como $4 > 3$, por el principio del palomar, una de esas elecciones repite en 2 de las 4 columnas del mismo color mencionadas. Eligimos esas 2 columnas y las 2 filas que hemos vinculado a ellas. Así, hemos encontrado un rectángulo como el deseado.

28. Una máquina de juego de un casino tiene una pantalla en la que se ofrece un esquema como el de la figura. Para comenzar el juego aparece una bola en el punto S. A cada impulso que recibe el jugador, esa bola se mueve hasta una de las letras inmediatas con la misma probabilidad para cada una de ellas. La partida termina al suceder uno de los hechos siguientes:

- La bola vuelve a S y, entonces, el jugador pierde.
- La bola vuelve a G y, entonces, el jugador gana.

Hallad la probabilidad de que el jugador gane.



Solución. Para que ganemos, debemos llegar al centro de la figura (a uno de los puntos B o C). Eso sucede con probabilidad $2/3$.

Una vez que llagamos al centro, el juego es *justo*'. O sea, ganamos y perdemos con la misma probabilidad. Para concluir que esa probabilidad es $1/2$ necesitamos demostrar que la probablilidad, digamos P_∞, de que no lleguemos nunca ni a S ni a G es nula. Notamos que, una veces que estamos en el centro, la probabilidad, digamos P_n, de que volvamos a él al cabo de $2n$ movimientos es

$$P_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Por tanto

$$P_\infty = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

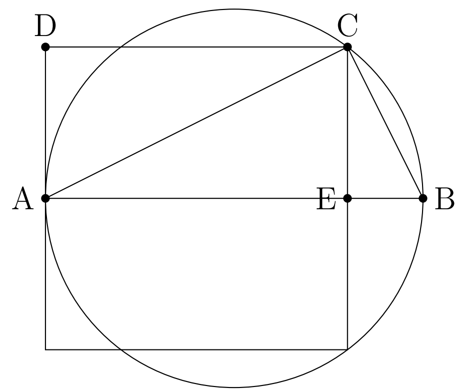
La probabilidad de ganar es

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{3}.}$$

29. Un cuadrado y una circunferencua están colocados de modo que un lado del cuadrado es tangente a la circunferencia y dos vértices del cuadrado pertenecen a la circunferencia.

- ¿Qué es mayor, el perímetro del cuadrado o la longitud de la circunferencia?
- ¿Qué es mayor, el área del cuadrado o la del círculo?

Solución.



Considermos que el lado del cuadrado es 1.

$$CD = 1, \quad AD = \frac{1}{2}, \quad AE = 1, \quad EC = \frac{1}{2}$$

Los triángulos AEC, CEB son semejantes. Por tanto,

$$\frac{AE}{EC} = \frac{EC}{EB}.$$

Despejando obtenemos

$$EB = \frac{1}{4}.$$

Luego radio de la circunferencia es

$$\frac{AB}{2} = \frac{AE + EB}{2} = \frac{5}{8}.$$

El cociente entre los perímetros de la circunferencia y el cuadrado es

$$\frac{2\pi(5/8)}{4} = \frac{5\pi}{16} < 1.$$

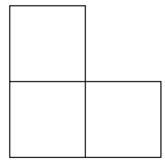
Es mayor el del cuadrado.

El cociente entre las áreas de la circunferencia y el cuadrado es

$$\frac{\pi(5/8)^2}{1} = \frac{25\pi}{64} > 1.$$

Es mayor la de la circunferencia.

30. Sea n un entero positivo. Tenemos un tablero $2^n \times 2^n$ y le quitamos uno de sus cuadrados. Prueba que el tablero restante puede ser cubierto (sin solapamiento) por piezas como las que se muestran en la figura.

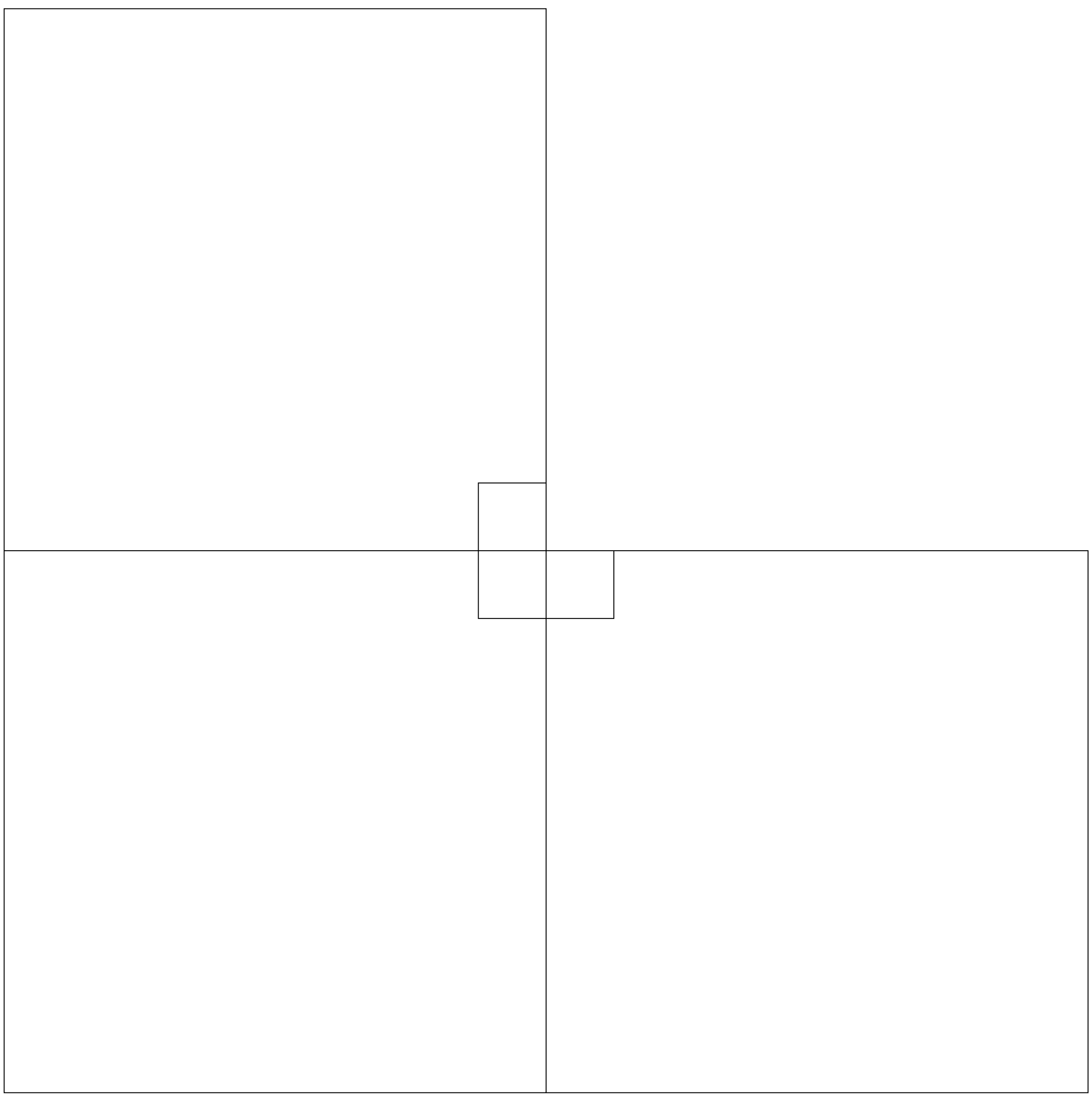


Solución.

Realizamos inducción sobre n.

- Supongamos que $n = 1$.

Al quitar un cuadrado a un tablero 2×2 queda una pieza como la de la figura. Luego el resultado es cierto.



• Supongamos que el resultado se verifica para un entero positivo $n = k$.

Consideramos un tablero $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ y le quitamos un cuadrado unitario.

Lo dividimos, de manera simétrica en 4 tableros $2^k \times 2^k$. Llamamos V al vértice común a los 4.

El cuadrado unitario está en uno de ellos. Ese lo podemos cubrir, y lo cubrimos, por piezas como la de la figura.

Colocamos una pieza como la de la figura en cubriendo, en la figura que queda por tapar, los tres cuadrados unitarios que tienen a V por vértice.

Ahora quedan por tapar 3 cuadrados $2^k \times 2^k$, a cada uno de los cuales les hemos quitado un cuadrado unitario. Pero sabemos cubrir, y lo hacemos cada uno de ellos.