Seminario de problemas. Curso 2014-15. Hoja 5

29. Encuentra los números naturales N que cumplen las siguientes condiciones: sus únicos divisores primos son 2 y 3, y el número de divisores de N^2 es el triple del número de divisores de N.

Solución.

Suponemos que $N = 2^\alpha \cdot 3^\beta$. El número de divisores de N es $(\alpha+1)(\beta+1)$. Entonces

$$(2\alpha+1)(2\beta+1) = 3(\alpha+1)(\beta+1),$$

o bien

$$\alpha + \beta - \alpha\beta + 2 = 0.$$

De aquí deducimos, por ejemplo, la expresión

$$(\alpha-1)(\beta-1) = 3.$$

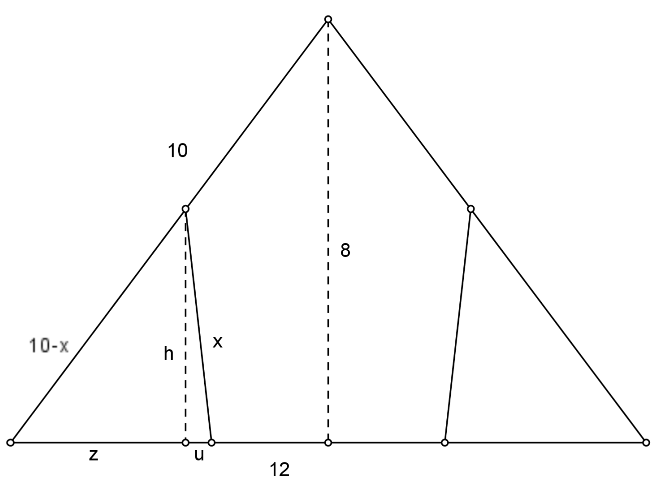
Pero α y β deben ser enteros positivos. Sólo caben las posibilidades

$$\alpha = 2, \quad \beta = 4; \quad \boldsymbol{N = 2^2 \cdot 3^4 = 324}$$

$$\alpha = 4, \quad \beta = 2; \quad \boldsymbol{N = 2^4 \cdot 3^2 = 144}$$

30. En un triángulo isósceles de lados 10, 10 y 12 se recortan simétricamente dos esquinas triangulares de manera que se obtiene entonces un pentágono equilátero. ¿Cuánto mide el lado de dicho pentágono?

Primera solución.



La altura del triángulo es $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Por semejanza de triángulos (ver la figura),

$$\frac{6}{z} = \frac{8}{h} = \frac{10}{10-x}.$$

De aquí,

$$h = \frac{4(10-x)}{5}, \qquad z = \frac{3(10-x)}{5}, \qquad u = 6 - z - \frac{x}{2} = \frac{x}{10}.$$

Y entonces

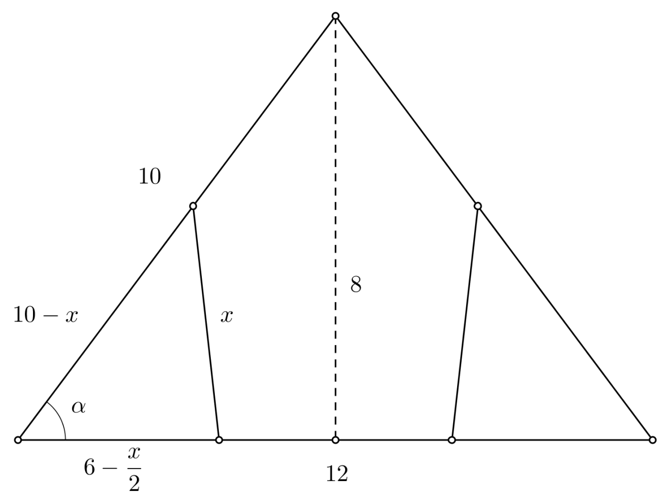
$$x^2 = h^2 + u^2 = \frac{16}{25}(10-x)^2 + \frac{x^2}{100},$$

ecuación de segundo grado en x:

$$7x^2 + 256x - 1280 = 0; \quad x = \frac{1}{7}(-128 + \sqrt{25344}) = \frac{1}{7}(-128 + 48\sqrt{11}) \approx 4.45.$$

Segunda solución.

Con trigonometría (notación de la figura siguiente):



Tenemos $\cos\alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Aplicando el teorema del coseno al triángulo de la esquina,

$$x^2 = (10-x)^2 + \left(6 - \frac{x}{2}\right)^2 - 2(10-x)\left(6 - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{3}{5},$$

de donde resulta, como en la solución anterior, la ecuación de segundo grado $7x^2 + 256x - 1280 = 0$.

31. Encuentra todos los números que se escriben en el sistema de numeración decimal como $23x7y3$ con ciertos dígitos x e y y que son múltiplos de 7.

Solución.

Los restos potenciales de 10 módulo 7:

n	$10^n \pmod 7$
0	$\mathbf{1}$
1	$10 \equiv \mathbf{3}$
2	$30 \equiv \mathbf{2}$
3	$20 \equiv 6 \equiv \mathbf{-1}$
4	$-10 \equiv \mathbf{-3}$
5	$-30 \equiv \mathbf{-2}$
6	$-20 \equiv 1$
$\vdots$	$\vdots$

Luego $N = 23x7y3 = \dot{7}$ si y solo si

$$3 + 3y + 2 \cdot 7 - x - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 3y - x + 4 \equiv 0 \pmod 7,$$

con $0 \leq x < 10$ y $0 \leq y < 10$. Hay catorce soluciones que se muestran en la siguiente tabla, que se ha construido a partir de la congruencia $x - 3y \equiv 4 \pmod 7$:

$x-3y$	y	x	N
4	0	4	**234703**
4	1	7	**237713**
-3	1	0	**230713**
-3	2	3	**233723**
-3	3	6	**236733**
-3	4	9	**239743**
-10	4	2	**232743**
-10	5	5	**235753**
-10	6	8	**238763**
-17	6	1	**231763**
-17	7	4	**234773**
-17	8	7	**237783**
-24	8	0	**230783**
-24	9	3	**233793**

32. Encuentra todos los términos que tienen en común las siguientes sucesiones (*progresiones aritméticas*) de números:

$$2,\ 21,\ 40,\ \ldots \qquad \text{y} \qquad 1312,\ 1301,\ 1290,\ \ldots$$

Solución. El *término general* de la p. a. 2, 21, 40, ... podemos escribirlo en la forma

$$a_{p+1} = 2 + 19p, \quad p = 0,\ 1,\ \ldots$$

Del mismo modo, el término general de la progresión 1312, 1301, 1290, ... es

$$b_{q+1} = 1312 - 11q, \quad q = 0,\ 1,\ \ldots$$

Se tiene $a_{p+1} = b_{q+1}$ si y solo si $19p + 11q = 1310$, ecuación diofántica lineal de solución general

$$\begin{cases} p = -4 + 11k \\ q = 126 - 19k \end{cases}$$

donde k es un número entero cualquiera. Buscamos las soluciones (p, q) con $p \geq 0$ y $q \geq 0$, lo que da

$$126/19 \geq k \geq 4/11,$$

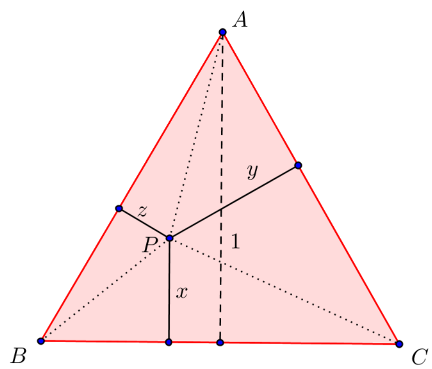
y restringe los posibles valores de k a $1 \leq k \leq 6$. Las seis soluciones del problema:

k	p	q	$a_{p+1} = b_{q+1}$
1	7	107	**135**
2	18	88	**344**
3	29	69	**553**
4	40	50	**762**
5	51	31	**971**
6	62	12	**1180**

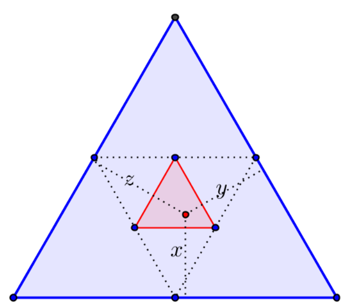
33. Un segmento de longitud 1 se divide en tres trozos de manera aleatoria. (a) Halla la probabilidad de que cada uno de los trozos mida más de $1/4$. (b) Halla la probabilidad de que se pueda formar un triángulo con los tres trozos.

Solución.

La división del segmento en tres trozos de longitudes x, y y z (en un orden establecido, de izquierda a derecha por ejemplo) se puede identificar con el punto interior P de un triángulo equilátero ABC de altura 1 que está a distancias x, y y z respectivamente de los lados BC, CA y AB, ya que es bien conocido que la suma de estas distancias es igual siempre a la altura del triángulo equilátero (ver la figura siguiente). Esta identificación es de naturaleza biyectiva. El cálculo de la probabilidad de cierto suceso asociado con la división aleatoria del segmento en tres trozos se puede reducir así al cálculo del cociente entre el área de cierta región interior al triángulo y el área total de éste.

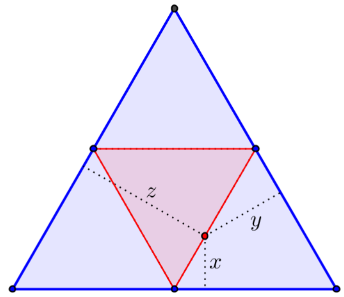


(a) La región del triángulo que corresponde a la intersección de $x > 1/4$, $y > 1/4$ y $z > 1/4$ es el pequeño triángulo interior de color rojo en la figura.



La probabilidad que se pide es, entonces, igual a $1/16$.

(b)



Para el punto marcado en esta figura se cumple $z = x+y(=1/2)$. La región de los puntos para los que se cumplen a la vez $z < x+y$ (es decir, $z < 1-z$ o $z < 1/2$), $y < x+z$ y $x < y+z$ es el triángulo pequeño interior.

La probabilidad de que se pueda formar un triángulo con los tres trozos de la división es por lo tanto igual a $1/4$.

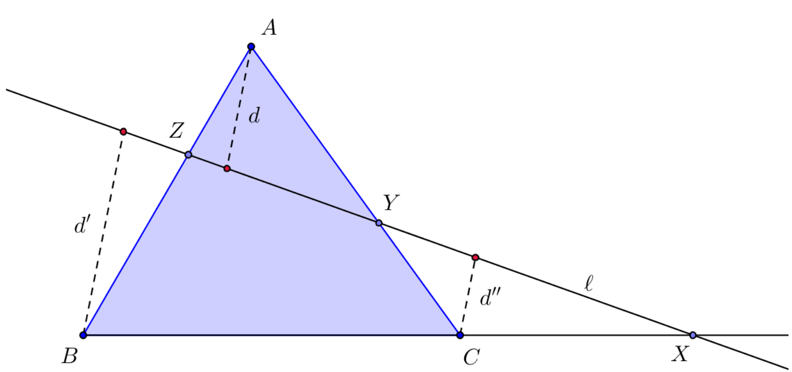
34. (a) Encuentra el enunciado y una demostración del "teorema de Menelao": *Si una recta corta a los lados del triángulo ABC en los puntos ...* (b) Sea G el baricentro de un triángulo ABC. Una recta que pasa por G corta al lado AB en el punto P y al lado AC en el punto Q. Prueba que se cumple $\dfrac{PB \cdot QC}{PA \cdot QA} \le \dfrac{1}{4}$.

Solución.

(a) Si la recta (transversal) ℓ corta a los lados (o a las prolongaciones de los lados) BC, CA y AB de un triángulo ABC respectivamente en los puntos X, Y y Z, se verifica la relación (Menelao, $\sim$ 98 d.C.)

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1.$$

(*Nota.* Y recíprocamente, si se verifica esta relación, entonces los tres puntos X, Y y Z están alineados. Algunos autores llaman teorema de Menelao a este enunciado recíproco.)



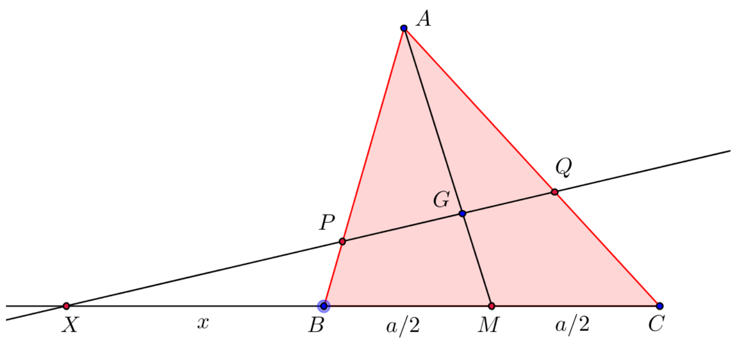
Es una aplicación sencilla del teorema de Thales, o de la semejanza de triángulos. Si se trazan por los vértices del $\triangle ABC$, hasta encontrarse con la transversal ℓ, rectas paralelas a un misma dirección arbitraria y las distancias sobre ellas, entre los vértices y la transversal son respectivamente d, d' y d'' (figura), se tiene

$$\frac{XB}{XC} = \frac{d'}{d''}\,; \quad \frac{YC}{YA} = \frac{d''}{d}\,; \quad \frac{ZA}{ZB} = \frac{d}{d'}\,;$$

luego, multiplicando las tres fracciones,

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = \frac{d'd''d}{d''dd'} = 1.$$

(b) Pongamos que la recta PQ corte a la prolongación del lado BC del triángulo ABC en el punto X (figura).



Aplicando el teorema de Menelao a los triángulos ABM y AMC cortados por la misma transversal PQ, se tiene, respectivamente

$$\frac{XM}{XB} \cdot \frac{PB}{PA} \cdot \frac{GA}{GM} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{XM}{XC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{GA}{GM} = 1.$$

Multiplicando estas dos igualdades y utilizando que $GA = 2GM$, queda

$$4 \cdot \frac{XM^2}{XB \cdot XC} \cdot \frac{PB \cdot QC}{PA \cdot QA} = 1,$$

luego

$$\frac{PB \cdot QC}{PA \cdot QA} = \frac{1}{4} \cdot \frac{XB \cdot XC}{XM^2}\,,$$

y solo queda probar que $XB \cdot XC \leq XM^2$. Pero, si $XB = x$ (figura) y $BC = a$, esta igualdad equivale a

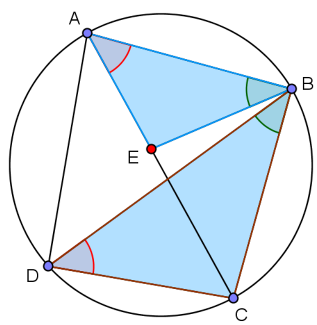
$$x(x+a) \leq \left(x + \frac{a}{2}\right)^2,$$

que se reduce a la identidad obvia $a^2/4 \geq 0$.

35. (a) Encuentra el enunciado y una demostración del "teorema de Ptolomeo": *Si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico ...* (b) Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscriptible en una circunferencia de radio 1 y tal que el lado AB es un diámetro de dicha circunferencia. Además, el cuadrilátero es *bicéntrico*, es decir, que admite también una circunferencia inscrita, tangente a sus cuatro lados. Prueba que se cumple $CD \leq 2\sqrt{5} - 4$.

Solución.

(a) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, con los vértices en ese orden a lo largo de su circunferencia circunscrita. Se cumple que $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ (el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los pares de lados opuestos). (Ptolomeo, $\sim$ 140 d.C.)



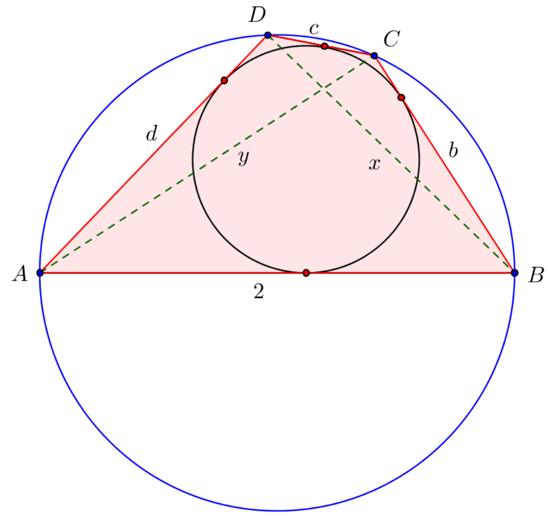
Sea E el punto de la diagonal AC tal que $\angle ABE = \angle CBD$. Aplicando el teorema del ángulo inscrito en una circunferencia (figura) es inmediato ver que los triángulos ABE y DBC son semejantes porque tienen los mismos ángulos. Se sigue que $AE \cdot BD = AB \cdot CD$.

También son semejantes los triángulos ABD y EBC, siguiéndose $EC \cdot BD = BC \cdot AD$. Sumando las dos igualdades resulta ya la conclusión:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = (AE + EC) \cdot BD = AC \cdot BD.$$

(b) Pongamos $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Se tiene $AB = 2$. Considerando los segmentos de tangentes desde los vértices A, B, C y D a la circunferencia interior que forman los lados del cuadrilátero, se tiene la relación (*teorema de Pitot*)

$$c + 2 = b + d.$$



Por otra parte, si $AC = x$ y $BD = y$, según el teorema de Ptolomeo se tiene

$$2c + bd = xy.$$

Además los ángulos ADB y ACB son rectos (inscritos en una semicircunferencia), luego

$$x^2 = 4 - b^2 \quad \text{e} \quad y^2 = 4 - d^2.$$

Aplicando la desigualdad entre las medias geométrica y aritmética de las cantidades positivas x^2 e y^2, tenemos[1]

$$2c + bd = xy = \sqrt{x^2 y^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{8 - b^2 - d^2}{2}$$

(con igualdad si y solo si $x = y$), de donde resulta, sucesivamente,

$$\begin{gathered} 4c + 2bd \leq 8 - b^2 - d^2, \\ 4c \leq 8 - (b + d)^2 = 8 - (c + 2)^2, \\ c^2 + 8c - 4 \leq 0. \end{gathered}$$

Las cantidades positivas c que satisfacen esta desigualdad verifican $c \leq 2\sqrt{5} - 4$. La igualdad se alcanza en el caso simétrico $b = d$ en que el cuadrilátero es un trapecio.

[1] Otro modo de proceder:

$$0 \leq (x - y)^2 = 8 - b^2 - d^2 - 2bd + 4c = 8 - (b + d)^2 + 4c = 8 - (c + 2)^2 + 4c$$

(con igualdad si y solo si $x = y$), de donde resulta la desigualdad $c^2 + 8c - 4 \leq 0$