

Seminario de problemas Bachillerato. Curso 2013-14. Hoja 5

37. Prueba que, si m y n son enteros positivos primos entre sí y a y b son enteros arbitrarios, el sistema de congruencias

$$\begin{cases} x \equiv a & (\text{mód } m) \\ x \equiv b & (\text{mód } n) \end{cases}$$

tiene solución.

Solución.

Podemos suponer $0 \leq a < m$ y $0 \leq b < n$. Considera los n enteros

$$a, a + m, a + 2m, \dots, a + (n - 1)m. \quad (1)$$

Todos ellos tienen el mismo resto a cuando se dividen por m . Y todos ellos tienen distinto resto cuando se dividen por n . Porque supón que, por el contrario, los números $im + a$ y $jm + a$, con $0 \leq i < j \leq n - 1$ diesen el mismo resto r al dividirlos por n . Entonces habría dos números enteros q_i y q_j tales que

$$im + a = q_i n + r \quad \text{y} \quad jm + a = q_j n + r.$$

Restando estas dos ecuaciones obtendríamos

$$(j - i)m = (q_j - q_i)n$$

y, como m y n son primos entre sí, de aquí se seguiría que $n \mid (j - i)$. Pero $0 < j - i \leq n - 1$, luego eso es imposible. De modo que los n enteros de (1) forman un sistema completo de restos módulo n . En particular, el número b pertenece a una de las clases de (1), es decir, hay un entero p , $0 \leq p \leq n - 1$, tal que el número $x = pm + a$ es congruente con b módulo n . De modo que para algún entero q se tiene $x = pm + a = qn + b$ y por consiguiente este número x es una solución de nuestro sistema de congruencias.

38. Halla el menor entero positivo que satisface el sistema de congruencias $3x \equiv -4 \pmod{19}$, $17x \equiv 35 \pmod{53}$.

Solución.

Unas reducciones en primer lugar para poner el sistema en la forma del problema anterior:

$$3x \equiv -4 \pmod{19} \xLeftrightarrow{\times 6} -x \equiv -24 \equiv -5 \pmod{19} \Leftrightarrow x \equiv 5 \pmod{19}.$$

$$17x \equiv 35 \pmod{53} \xLeftrightarrow{\times 3} -2x \equiv -54 \pmod{53} \xLeftrightarrow{\times (-1/2)} x \equiv 27 \pmod{53}.$$

Con esto, debe ser $x = 19p + 5 = 53q + 27$ para algunos enteros p y q , y estos números son solución entonces de la ecuación lineal *diophántica* $19p - 53q = 22$. Vamos a encontrar una solución particular de esta ecuación:

$$\begin{aligned} p &= \frac{53q + 22}{19} = 2q + 1 + \frac{15q + 3}{19}; \\ \frac{15q + 3}{19} &= r \Rightarrow q = \frac{19r - 3}{15} = r + \frac{4r - 3}{15}; \\ \frac{4r - 3}{15} &= s \Rightarrow r = \frac{15s + 3}{4} = 3s + \frac{3s + 3}{4}; \end{aligned}$$

tomando $s = 3$ resulta $r = 9 + 3 = 12$; $q = 12 + 3 = 15$; $p = 31 + 12 = 43$.

La solución general de la ecuación es $p = 43 + 53t$, $q = 15 + 19t$ para t entero cualquiera. Entonces, las soluciones del sistema de congruencias son $x = 53q + 27 = 822 + 1007t$, y la menor solución positiva es $x = 822$.

- 39.** La relación de recurrencia $x_n = 3x_{n-1} + 2$ define una sucesión de números a partir de un valor inicial x_0 . Prueba que se puede elegir un cierto valor entero para x_0 de modo que x_{100} sea divisible por 2014.

Solución.

Sea $y_n = \frac{x_n}{3^n}$, entonces $y_n = y_{n-1} + \frac{2}{3^n}$, lo que implica

$$y_n = y_0 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n}.$$

Esto da $x_n = (x_0 + 1)3^n - 1$. Queremos que $x_{100} = (x_0 + 1)3^{100} - 1$ sea divisible por $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$.

Ahora, $3^n \equiv 1 \pmod{2}$ para todo n , así que $3^{100} \equiv 1 \pmod{2}$, y la condición de divisibilidad por 2 queda en la forma $x_0 \equiv 0 \pmod{2}$.

Los restos potenciales de 3 módulo 19 son, sucesivamente (empezando en $3^0 = 1$)

$$1, 3, 9, 8, 5, -4, 7, 2, 6, 3^9 \equiv -1, \dots, 3^{18} \equiv 1,$$

luego $3^{100} = 3^{18 \cdot 5 + 10} \equiv 3^{10} \equiv -3 \pmod{19}$, y la condición de divisibilidad por 19 queda $3x_0 \equiv -4 \pmod{19}$ o, como hemos visto en el problema anterior, $x_0 \equiv 5 \pmod{19}$.

Usando el *Pequeño teorema de Fermat*, sabemos que $3^{52} \equiv 1 \pmod{53}$, luego $3^{100} = 3^{52 \cdot 2 - 4} \equiv 3^{-4} = \frac{1}{81} \equiv \frac{1}{28} \equiv q \pmod{53}$, donde q satisface la congruencia auxiliar $28q \equiv 1 \pmod{53}$ equivalente a la ecuación diofántica lineal $28q - 53r = 1$, que tiene la solución $q = 36$.

Luego $3^{100} \equiv 36 \pmod{53}$, y la condición de divisibilidad por 53 queda $36x_0 \equiv -35 \pmod{53}$, $17x_0 \equiv 35 \pmod{53}$ o, como hemos visto en el problema anterior, $x_0 \equiv 27 \pmod{53}$.

En total, x_0 debe verificar el sistema de congruencias

$$x_0 \equiv 0 \pmod{2}, \quad x_0 \equiv 5 \pmod{19}, \quad x_0 \equiv 27 \pmod{53}.$$

Como 2, 19 y 53 son primos, tal x_0 existe en aplicación del *teorema chino del resto*. De hecho, el menor valor es, de acuerdo con el resultado del problema anterior, $x_0 = 822$. Con este valor inicial,

$$\begin{aligned} x_{100} &= 424155699562445325443007509797106307433834490606822, \\ &= 2014 \times 210603624410350211242804126016438087107167075773. \end{aligned}$$

- 40.** Encuentra el menor entero positivo n tal que, si se mueve el primero de sus dígitos decimales al final, el número que resulta es exactamente $1.5 \cdot n$.

Solución.

Sea d el primer dígito del número n que buscamos. Entonces $n = 10^k d + r$. A partir de la condición del enunciado tenemos

$$\frac{3}{2}(10^k d + r) = 10r + d \implies 3d \cdot 10^k + 3r = 20r + 2d \implies d(3 \cdot 10^k - 2) = 17r,$$

es decir,

$$17 \mid 3 \cdot 10^k - 2 \implies 3 \cdot 10^k \equiv 2 \pmod{17} \xLeftrightarrow{\times 6} 10^k \equiv 12 \pmod{17},$$

con la solución mínima (cuentas) $k = 15$, $d = 1$. Por consiguiente,

$$r = \frac{3 \cdot 10^{15} - 2}{17} \implies n = \frac{20 \cdot 10^{15} - 2}{17} = 1176470588235294.$$

- 41.** Prueba que, en el plano cartesiano, ninguna circunferencia de centro $(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$ contiene más de un punto de coordenadas enteras.

Solución.

Si los puntos de coordenadas enteras (a, b) y (c, d) equidistan del punto $(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$, entonces

$$(a - \sqrt{2})^2 + \left(b - \frac{1}{3}\right)^2 = (c - \sqrt{2})^2 + \left(d - \frac{1}{3}\right)^2,$$

o bien

$$a^2 - c^2 + b^2 - d^2 - \frac{2}{3}(b - d) = 2\sqrt{2}(a - c).$$

El número a la izquierda es racional. Luego $a = c$. Entonces,

$$\begin{aligned} b^2 - d^2 - \frac{2}{3}(b - d) &= 0, \\ (b - d)(b + d) - \frac{2}{3}(b - d) &= 0, \\ (b - d)\left(b + d - \frac{2}{3}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Pero $b + d - \frac{2}{3} \neq 0$ ya que $b + d$ es entero. Entonces $b = d$, y por consiguiente, $(a, b) = (c, d)$.

- 42.** Encuentra infinitos números compuestos en la sucesión 1, 31, 331, 3331, 33331,

Solución.

Hasta $n = 8$ la sucesión a_n consta de números primos. El noveno término es compuesto, $a_9 = 17 \cdot 19607843$.

Vamos a ver, por ejemplo, que hay infinitos términos de la sucesión divisibles por 31. El término general de la sucesión se puede calcular sin sumar una progresión geométrica si caemos en que $3a_n + 7 = 10^n$, de donde resulta

$$a_n = \frac{10^n - 7}{3}.$$

Los sucesivos restos potenciales de 10 módulo 31 son, desde el exponente 1 en adelante,

$$10, 7, 8, 18, 25, 2, 20, 14, 16, 5, 19, 4, 9, 28, 1, \dots$$

de modo que $10^2 \equiv 7 \pmod{31}$ y $10^{15} \equiv 1 \pmod{31}$. Entonces $31 \mid 10^{15k+2} - 7$ para todo $k = 0, 1, \dots$, y los infinitos términos a_{15k+2} son divisibles por 31.

Nota. No cuesta tampoco mucho comprobar que los términos a_{16k+9} son divisibles por 17. O que los términos a_{18k+12} son divisibles por 19.

- 43.** ¿Cuál es el dígito final del número $7^{7^{7^{\dots^7}}}$? (hay 2013 setes en esta *torre* de setes).

Solución.

Observa que

$$7^4 = (7^2)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{10}.$$

Por consiguiente, módulo 10,

$$7^k \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } k \equiv 0 \pmod{4} \\ 7 & \text{si } k \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{si } k \equiv 2 \pmod{4} \\ -7 & \text{si } k \equiv 3 \pmod{4}; \end{cases}$$

donde k es un número natural. Entonces, para determinar el último dígito de una torre de 2013 setes, hay que saber con qué número es congruente módulo 4 una torre de 2012 setes. Ahora bien, $7 \equiv -1 \pmod{4}$. Por lo tanto, módulo 4,

$$7^m \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ es par} \\ -1 & \text{si } m \text{ es impar}; \end{cases}$$

donde m es un número natural. Una torre de 2011 setes es desde luego un número impar. Luego una torre de 2012 setes es congruente con -1 módulo 4 (y $-1 \equiv 3 \pmod{4}$). Así que una torre de 2013 setes es congruente con -7 módulo 10 (y $-7 \equiv 3 \pmod{10}$). Por lo tanto, nuestra torre de setes acaba en 3 (de hecho, cualquier torre de setes, desde 7^7 , acaba en 3).