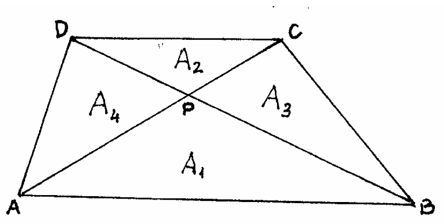
22. Sea ABCD un trapecio cuya base mayor es AB. Las diagonales AC y BD se cortan en el punto P. Si llamamos respectivamente A_1, A_2, A_3 y A_4 a las áreas de los triángulos ABP, CDP, BCP y DAP, demostrar que $A_3 = A_4 = \sqrt{A_1 \cdot A_2}$.



Solución

Designaremos por $\left[ABC\right]$ el área del triángulo ABC, etc.

Demostremos primero que $A_3 = A_4$. En efecto: $\left[ABC\right] = \left[ABD\right]$ por tener la misma base AB y la misma altura (AB y CD son paralelas). De aquí: $A_1 + A_3 = A_1 + A_4 \Rightarrow A_3 = A_4$

Sea $k = \dfrac{AB}{CD}$. Los triángulos ABP y CDP son semejantes, pues tienen sus ángulos respectivamente iguales. La razón de semejanza es k : $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{PB}{DP} = \dfrac{PA}{CP} = k$, y además

$$\frac{A_1}{A_2} = k^2 \Rightarrow A_1 = k^2 \cdot A_2$$

Por otro lado los triángulos CDP y CPB comparten la misma altura desde C, por lo que sus áreas son directamente proporcionales a sus bases DP y PB. Por tanto:

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{PB}{DP} = k \Rightarrow A_3 = kA_2 \quad \text{y por fin} \quad A_1 \cdot A_2 = k^2 \cdot A_2^2 = A_3^2 \quad \Rightarrow \quad A_3 = \sqrt{A_1 \cdot A_2} \quad \text{c.q.d.}$$

23. Hallar en función de los coeficientes *a, b* y *c*, la ecuación de segundo grado cuyas soluciones son los cubos de las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$.

Solución

Sean x_1 y x_2 las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$. Sabemos que $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} & \text{(I)} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} & \text{(II)} \end{cases}$

La ecuación buscada ha de ser equivalente a $\left(x - x_1^3\right)\left(x - x_2^3\right) = 0$, es decir:

$$x^2 - \left(x_1^3 + x_2^3\right)x + x_1^3 \cdot x_2^3 = 0$$

Elevamos al cubo la igualdad (I)

$$-\frac{b^3}{a^3} = \left(x_1 + x_2\right)^3 = x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + x_2^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2\left(x_1 + x_2\right) = x_1^3 + x_2^3 + \frac{3c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Por tanto: $x_1^3 + x_2^3 = \dfrac{3bc}{a^2} - \dfrac{b^3}{a^3} = \dfrac{3abc - b^3}{a^3}$ y como $x_1^3 \cdot x_2^3 = \dfrac{c^3}{a^3}$, la ecuación buscada es

$$x^2 + \frac{b^3 - 3abc}{a^3} \cdot x + \frac{c^3}{a^3} = 0 \quad \text{o mejor} \quad a^3 x^2 + \left(b^3 - 3abc\right)x + c^3 = 0$$

24. Sea P(x)=0 una ecuación polinómica de quinto grado con coeficientes enteros que tiene, al menos, una raíz entera. Si P(2)=13 y P(10)=5, calcula alguna raíz de P(x)=0.

Solución

Podemos expresar el polinomio *P(x)* de dos formas: $\begin{cases} P(x)=(x-2)Q(x)+13 \\ P(x)=(x-10)R(x)+5 \end{cases}$ donde *Q(x)* y *R(x)* son polinomios de grado 4 con coeficientes enteros.

Si z es una solución entera de *P(x)=0*, tendremos:

$$\begin{cases} P(z)=(z-2)Q(z)+13=0 \Rightarrow (z-2)\,|\,13 \Rightarrow z-2=\pm 1 \quad o \quad z-2=\pm 13 \\ P(z)=(z-10)R(z)+5 \Rightarrow (z-10)\,|\,5 \Rightarrow z-10=\pm 1 \quad o \quad z-10=\pm 5 \end{cases}$$

Los posibles valores que cumplen la primera condición son *z=3* , *z=1*, *z=15* , *z=-11*
Y los que cumplen la segunda son: *z=11* , *z=9*, *z=15* , *z=5*

Por tanto, la solución entera ha de ser *z=15*.

25. Los números 46 y 96 tienen una curiosa propiedad: su producto no se altera si “bailamos” las cifras de los dos factores (46 · 96 = 64 · 69 = 4416). Determinar todas las parejas de números de dos cifras no nulas que tienen esta propiedad.
No interesan casos simétricos (23 · 32 =32 · 23) ni casos triviales (22 · 33 = 22 · 33), por lo que se exige que sean distintas, al menos, tres de las cuatro cifras implicadas.

Solución
Supongamos que los números buscados se escriben xy y zt .

Cumplirán $(10x+y)(10z+t)=(10y+x)(10t+z)$. Desarrollando y simplificando se tiene:

$$100xz+\cancel{10yz}+\cancel{10xt}+yt=100yt+\cancel{10yz}+\cancel{10xt}+xz \Rightarrow xz=yt$$

Esta condición la podemos poner en la forma $\frac{x}{y}=\frac{t}{z}$ para facilitar la identificación de los casos. Podemos suponer, además, que $x<y$. Las posibilidades son:

a) $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}$, que nos da 6 casos: 12·42=21·24 ; 12·63=21·36 ; 12·84=21·48 ;
24·63=42·36 ; 24·84=42·48 ; 36·84=63·48

b) $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}$, que nos da 3 casos: 13·62=31·26 ; 13· 93=31·39 ; 26·93=62·39

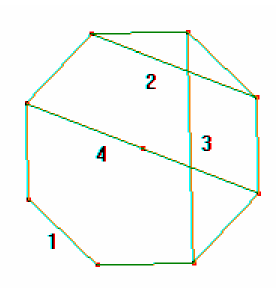
c) $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$, que nos da 3 casos: 23·64=32·46 ; 23·96=32·69 ; 46·96=64·69

d) $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$, que nos da 1 caso: 14·82=41·28

e) $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$, que nos da 1 caso: 34·86=43·68

En total hay 14 casos

26. La figura muestra cómo pueden emparejarse por medio de segmentos de distinta longitud los ocho vértices de un octógono regular de forma que cada vértice sólo esté utilizado en un solo emparejamiento:
¿Puede hacerse lo mismo con un dodecágono regular?



Solución

Si a partir de un vértice numeramos alternativamente con ceros y unos los vértices sucesivos obtendremos 6 vértices pares (numerados con 0) y 6 vértices impares (numerados con 1).

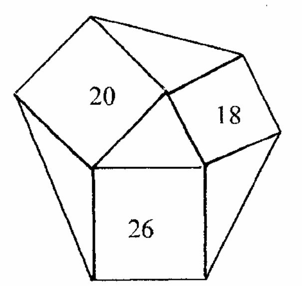
Llamemos n a la distancia, en arcos de 1/12 de circunferencia, entre dos vértices. Necesitamos construir 6 segmentos de longitudes 1, 2, 3, 4, 5 y 6 sin repetir vértices:

*Los de longitudes 2, 4 y 6 unirán dos puntos de la misma paridad. Ello supone la utilización de un número par de vértices 0 ó 1.

*Los de longitudes 1, 3 y 5 unirán dos puntos de distinta paridad, lo que supone en todo caso la utilización en cada caso de un vértice 0 y otro 1.

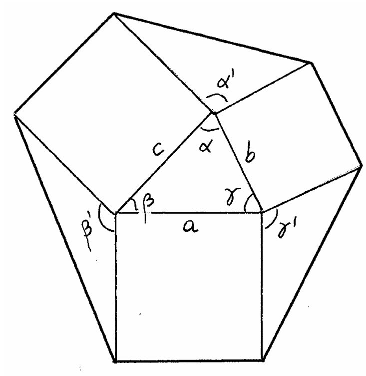
Puesto que hay seis vértices 0 y seis vértices 1, y dado que la suma de un número par y un número impar da como resultado un número impar, concluiremos que **tales emparejamientos no son posibles en el caso del dodecágono regular.**

27. Sobre los lados de un triángulo se construyen hacia fuera tres cuadrados de áreas 26, 20 y 18 como indica la figura.
Halla el área del hexágono irregular resultante.



Solución

Los cuatro triángulos de la figura tienen la misma área, ya que si A es el área del triángulo central, las áreas de los laterales son:



$$A_1 = \tfrac{1}{2} a\cdot b\cdot sen\gamma' = \tfrac{1}{2} a\cdot b\cdot sen\gamma = A \quad pues \;\; \gamma + \gamma' = \pi$$
$$A_2 = \tfrac{1}{2} b\cdot c\cdot sen\alpha' = \tfrac{1}{2} b\cdot c\cdot sen\alpha = A \quad pues \;\; \alpha + \alpha' = \pi$$
$$A_3 = \tfrac{1}{2} a\cdot c\cdot sen\beta' = \tfrac{1}{2} a\cdot c\cdot sen\beta = A \quad pues \;\; \beta + \beta' = \pi$$

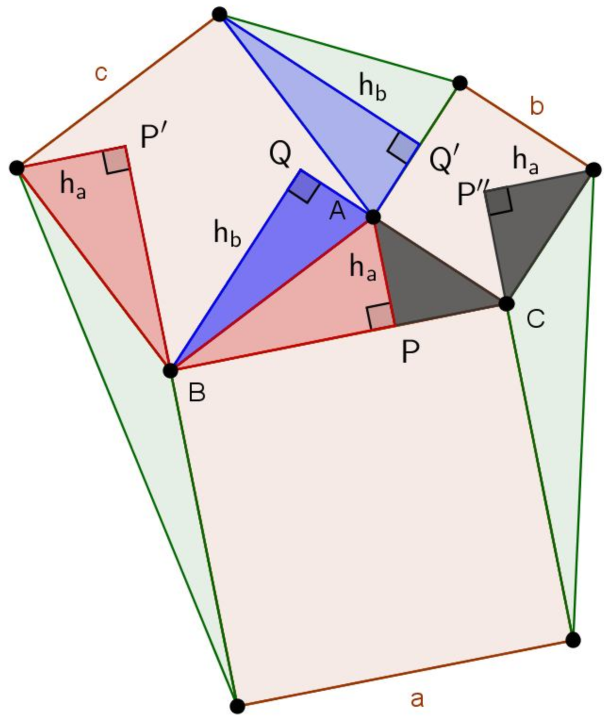
Por el teorema del coseno aplicado al lado mayor a:

$$26 = 20 + 18 - 2\sqrt{20\cdot 18}\;\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow sen\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Por tanto $A = \frac{1}{2} b\cdot c\cdot sen\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{20}\cdot\sqrt{18}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} = 9$ y el área buscada es: 26+20+18+4 · 9=100

Versión para ESO:

*La igualdad de áreas de los 4 triángulos puede hacerse con una demostración sin palabras:



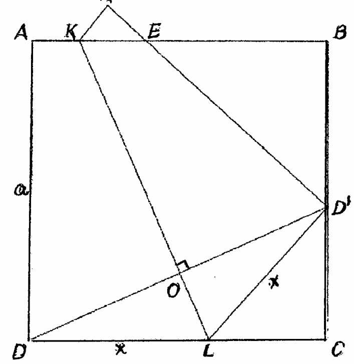
*El cálculo del área del triángulo puede hacerse con el método de la altura (ya que la fórmula de Herón no resulta apetecible aquí).

Trazamos la altura $h_a = AP$ del lado mayor. Sea $x = PC \Rightarrow BP = \sqrt{26} - x$ y aplicamos el Teorema de Pitágoras a los triángulos APC y APB: $\begin{cases} 18 = h_a^2 + x^2 \\ 20 = h_a^2 + (\sqrt{26} - x)^2 \end{cases}$ Restando: $2 = 26 - 2\sqrt{26}\,x \Rightarrow x = \dfrac{12}{\sqrt{26}}$

De aquí: $h_a^2 = 18 - \dfrac{144}{26} = 18 - \dfrac{72}{13} = \dfrac{162}{13} \Rightarrow h_a = \sqrt{\dfrac{162}{13}}$

Y el área de cada triángulo es $A = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{\dfrac{162}{13}} = \sqrt{81} = 9$

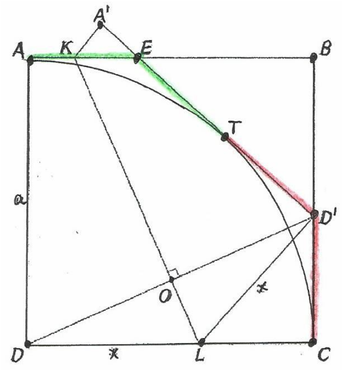
27. Los vértices de una cartulina cuadrada son A, B, C y D. Se pliega la cartulina de modo que el punto D se transforma en D' sobre el lado BC. Sea A' la imagen de A después del plegado, y sea E el punto de intersección de AB y A'D'. Probar que A'E es el radio *r* de la circunferencia inscrita al triángulo EBD'.



Solución

Sea a el lado del cuadrado.
La distancia de D' a la recta AD es a.
Recíprocamente también es a la distancia de D a ED'.
Entonces D es el centro de una de las circunferencias exinscritas al triángulo EBD', pues la distancia de D a los tres lados de este triángulo es a.

Sea T el punto de tangencia de la circunferencia exinscrita con el lado ED'.



Por la igualdad de segmentos tangentes desde un punto a una circunferencia tenemos que: AE= ET y TD'=D'C.

El perímetro del triángulo EBD' es:
BE+ET+TD'+D'B=BE+EA+CD'+D'B=AB+BC=a+a=$2a$

Pero sabemos que en todo triángulo rectángulo, la suma de las longitudes de los catetos es igual a la suma de la longitud de la hipotenusa y el doble del radio de la circunferencia inscrita.
(O mejor, que el radio de la circunferencia inscrita a un triángulo rectángulo es la diferencia entre el semiperímetro y la hipotenusa).

De ahí: $r = \dfrac{2a - 2ED'}{2} = a - ED' = A'D' - ED' = A'E \;\; c.q.d.$