13. Demostrar que si $a_1, a_2, ..., a_n$ son números reales positivos, entonces

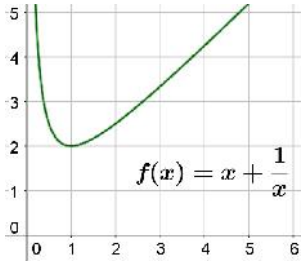
$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)\cdot\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Solución:

Demostración por inducción sobre n.

n=1: $\quad (a_1)\cdot\left(\frac{1}{a_1}\right) = 1 \geq 1^2$

n=2: $\quad (a_1 + a_2)\cdot\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) = 1 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} + 1 \geq 2 + \underbrace{a_1 / a_2 + \frac{1}{a_2 / a_1}}_{\geq 2} \geq 2 + 2 = 2^2$



Supuesto que es cierto hasta "n", para "n+1":

$$\underline{\left|(a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1})\cdot\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) =\right.}$$

$$= (a_1 + a_2 + ... + a_n)\cdot\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) + (a_1 + a_2 + ... + a_n)\cdot\frac{1}{a_{n+1}} + a_{n+1}\cdot\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) + a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_{n+1}} \geq$$

$$n^2 + \frac{a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_2}{a_{n+1}} + ... + \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} + \frac{a_{n+1}}{a_2} + ... + \frac{a_{n+1}}{a_n} + 1 \geq n^2 + 2n + 1 = \underline{\left.(n+1)^2\right|}$$

14. Si $N = a_0 + 1000 \cdot a_1 + 1000^2 \cdot a_2 \ldots + 1000^n \cdot a_n$, $S = a_0 - a_1 + a_2 \ldots + (-1)^n \cdot a_n$ y cada coeficiente a_k es entero ($0 \le k \le n$):

a) Demostrar que *N* y *S* son congruentes respecto al módulo 1001 (tienen el mismo resto al dividirlos por 1001).

Solución:

$N \equiv S\,(módulo 1001) \Leftrightarrow N - S \equiv 0\,(módulo 1001) \Leftrightarrow N - S = \dot{1001}$

Como $1000 \equiv -1\,(módulo 1001)$:

$$\underline{N \equiv} a_0 + (-1) \cdot a_1 + (-1)^2 \cdot a_2 + (-1)^3 \cdot a_3 \ldots + (-1)^n \cdot a_n =$$
$$= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \ldots + (-1)^n \cdot a_n = \underline{S}\,(módulo\,1001)$$

b) Deducir de ello un criterio de divisibilidad para 7, 11 o 13 y aplicarlo al número 186236745823691615.

Solución:

$186\,236\,745\,823\,691\,615 = 615 + 1000 \cdot 691 + 1000^2 \cdot 823 + 1000^3 \cdot 745 + 1\,000^4 \cdot 236 + 1\,000^5 \cdot 18$

$186\,236\,745\,823\,691\,615$ *es* $\dot{1001} \Leftrightarrow 615 - 691 + 823 - 745 + 236 - 186 = \dot{1001}$

Pero $615 - 691 + 823 - 745 + 236 - 186 = 52 \neq \dot{1001}$

Como $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, *el número* $\boxed{\text{es } \dot{13}}$ *pero* $\boxed{\text{no es } \dot{7} \text{ y } \dot{11}}$

Oposiciones de Secundaria. La Rioja 2015.

15. La ecuación $x^3+ax^2+bx+c=0$, $c\neq 0$ tiene tres raíces reales distintas en progresión geométrica y cuyos inversos pueden ordenarse de modo que formen progresión aritmética. Hallar b y c en función de a.

Solución: ^

$$Sean\ las\ tres\ raíces\ en\ P.G.:\quad x_1=\frac{s}{r}\ ,\ x_2=s\ ,\ x_3=s\cdot r\quad (r,s\neq 0\ ,\ r\neq 1)$$

$$\begin{cases} r>0\ ,\ \underbrace{como\ están\ los\ inversos\ en\ P.A.}_{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_3}=2\frac{1}{x_2}}: \dfrac{r}{s}+\dfrac{1}{sr}=2\cdot\dfrac{1}{s}\Rightarrow r+\dfrac{1}{r}=2\Rightarrow r=1(no\ válido) \\ r<0\ ,\ \underbrace{como\ están\ los\ inversos\ en\ P.A.}_{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2\frac{1}{x_3}}: \dfrac{r}{s}+\dfrac{1}{s}=2\dfrac{1}{rs}\Rightarrow r+1=\dfrac{2}{r}\Rightarrow \end{cases}$$

$$r^2+r-2=0\Rightarrow r=1(no\ válido)\ ó\ r=-2$$

Utilizando las fórmulas de Cardano, que relacionan las raíces de una ecuación con sus coeficientes:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-a \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b \\ x_1x_2x_3=-c \end{cases} \begin{cases} \dfrac{s}{-2}+s-2s=-a\Rightarrow \dfrac{-3}{2}s=-a\Rightarrow s=\dfrac{2a}{3} \\ \dfrac{s^2}{-2}-2s^2+s^2=b\Rightarrow \dfrac{-3}{2}s^2=b\Rightarrow \dfrac{-3}{2}\cdot\dfrac{4a^2}{9}=b\Rightarrow \boxed{b=\dfrac{-2a^2}{3}} \\ s^3=-c\Rightarrow \boxed{c=\dfrac{-8a^3}{27}} \end{cases}$$

16. En un juego están tres personas A, B y C que lanzan sucesivamente en el orden A, B, C un dado. La primera persona que saque un 6, gana:

a) ¿Cuáles son sus respectivas probabilidades de ganar?

Solución:

Recordando que la suma de los infinitos términos de una P.G. de primer término a_1 y razón $|r|<1$ es: $S=\dfrac{a_1}{1-r}$

$$\left.\begin{aligned} p(A)&=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\ldots=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-(5/6)^3}=\frac{36}{91}\\ p(B)&=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\ldots=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-(5/6)^3}=\frac{30}{91}\\ p(C)&=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\ldots=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-(5/6)^3}=\frac{25}{91}\end{aligned}\right\}\ \frac{36}{91}+\frac{30}{91}+\frac{25}{91}=1$$

Fijarse en que $p(B)=\dfrac{5}{6}\cdot p(A)$ *y* $p(C)=\dfrac{5}{6}\cdot p(B)$

b) Calcular la probabilidad de que el juego termine en el décimo lanzamiento y de que la persona C saque siempre la suma de lo que acaban de sacar los jugadores A y B en las tiradas inmediatamente anteriores.

Solución:

Por cada bloque de tres lanzamientos hay 10 *casos favorables*:

$112-123-213-134-314-145-415-224-235-325$

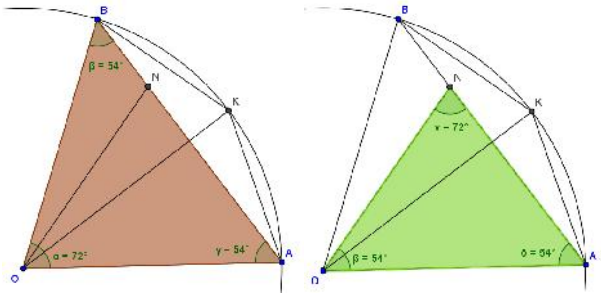
$$p=\overbrace{\frac{A\,B\,C}{10}}\cdot\overbrace{\frac{A\,B\,C}{10}}\cdot\overbrace{\frac{A\,B\,C}{10}}\cdot\overbrace{\frac{A}{1}}{6}=\frac{1000}{6^{10}}\sim 1.65\cdot 10^{-5}$$

Oposiciones de Secundaria. Castilla y León 2004.

17. Se consideran los lados del pentágono, hexágono y decágono regulares, inscritos en una misma circunferencia de radio R. Demuéstrese que el triángulo cuyos lados son los de esos tres polígonos es un triángulo rectángulo.

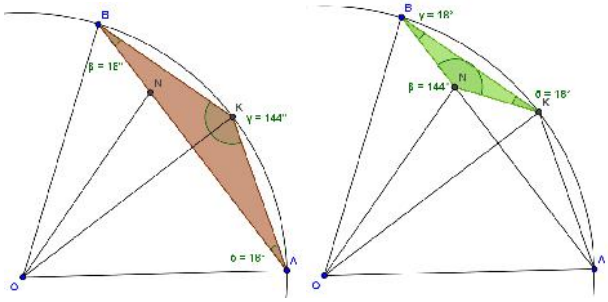
Solución:

OA es el lado del hexágono regular (radio de la circunferencia), AB del pentágono regular y BK o AK del decágono regular.



$$\overset{\Delta}{AOB} \sim \overset{\Delta}{ANO} \Rightarrow \frac{AB}{OA} = \frac{OA}{AN} \Rightarrow OA^2 = AB \cdot AN$$

ó OB ó ON



$$\overset{\Delta}{AKB} \sim \overset{\Delta}{BNK} \Rightarrow \frac{AB}{BK} = \frac{BK}{BN} \Rightarrow BK^2 = AB \cdot BN$$

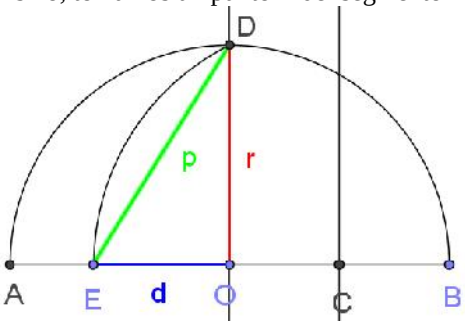
ó AK ó NK

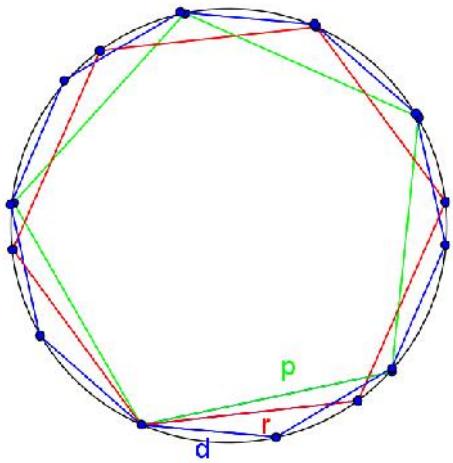
Sumando las expresiones en rojo:

$$\left.\begin{array}{l} OA^2 = AB \cdot AN \\ BK^2 = AB \cdot BN \end{array}\right\} \boxed{OA^2 + BK^2 = AB \cdot AN + AB \cdot BN = AB \cdot (AN + BN) = \underline{AB^2}}$$

Proposición 10 del libro XIII de los Elementos de Euclides.

Para dibujar el pentágono, hexágono y decágono inscrito en una circunferencia con Regla y Compás, consideremos un semicírculo de centro O y de diámetro AB. Tomamos los puntos C y D, puntos medios respectivamente del radio OB y del arco AB. Asimismo, tomamos un punto E del segmento AO, de tal manera que CE = CD.





ED = p , OD = r y OE = d son respectivamente las longitudes de los lados del pentágono, hexágono y decágono regulares inscritos en esa circunferencia.

18. Se sabe que una elección, para la que hay dos candidatos A y B, ha terminado con el resultado de 9 votos a favor de A y 6 votos a favor de B. Calcula la probabilidad de que durante el escrutinio de los votos siempre haya ido por delante el candidato A.

Solución:

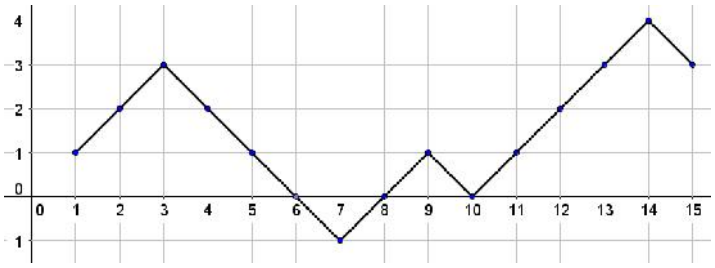
El número de formas posibles de colocar de forma ordenada 9 A's y 6 B's es:

$$\binom{9+6}{9}=\frac{15!}{9!\cdot 6!}=5005$$

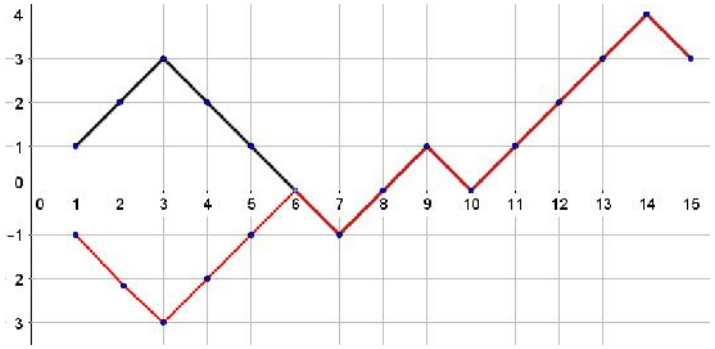
De ellas, para contar las que está por delante en el recuento A, debe empezar el escrutinio al menos por un A: $\binom{9+6-1}{9-1}=\binom{14}{8}=\frac{14!}{8!\cdot 6!}=3003$

Hay que descontar las que no cumplan el requisito de estar siempre por delante A.

Tengamos en cuenta la variable que cuenta, cada vez que se cuenta un voto, la diferencia entre el número de votos obtenidos por A y el número de votos de B hasta ese momento.
Esta variable comienza por 1, ya que el primer voto es de A (punto (1,1)) y acaba en 3 tras el recuento de todos los votos (punto (15,3)).



Hay que descontar por tanto el número de caminos que van de (1,1) a (15,3) que cortan en algún momento al eje OX (diferencia 0).
Reflejando sobre dicho eje todos los caminos hasta que se produzca el primer corte, coinciden con todos los que van de (-1,1) a (15,3):



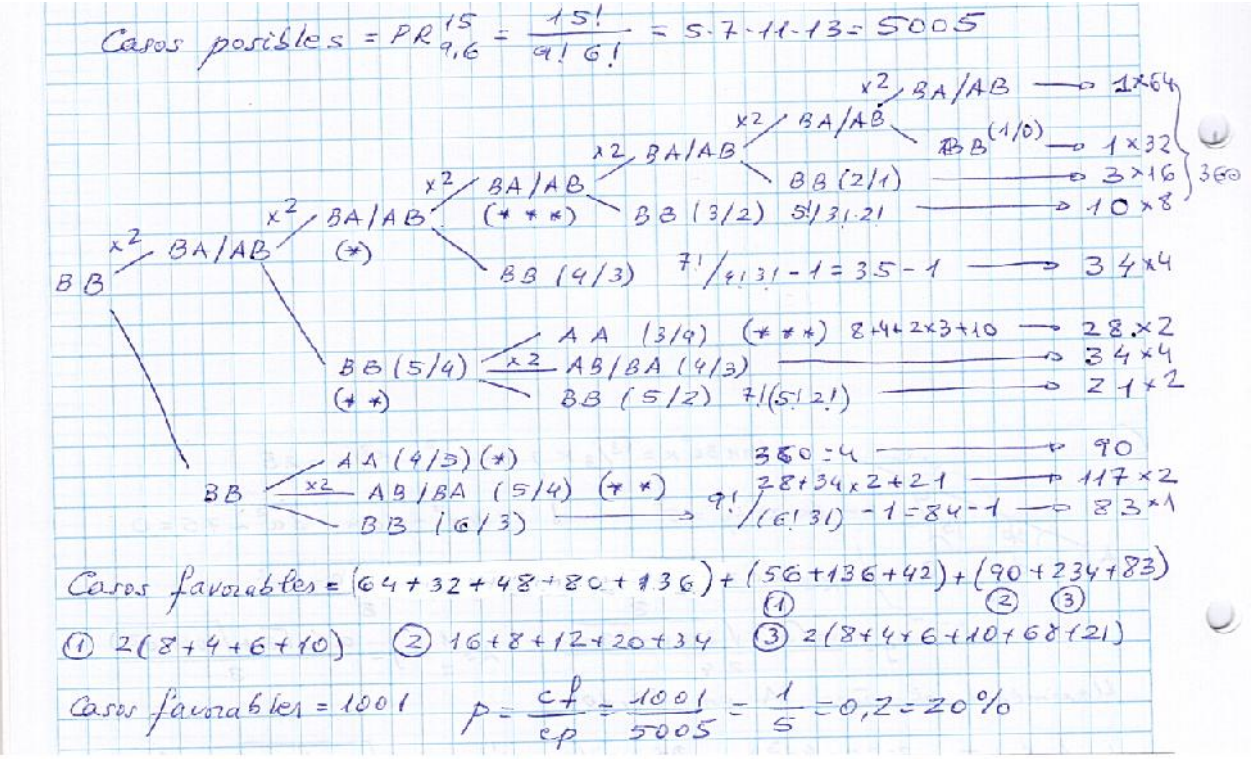
$$\binom{15-1}{9}=\binom{14}{9}=\frac{14!}{9!\cdot 5!}=2002$$

Por tanto: $p=\dfrac{\binom{14}{8}-\binom{14}{9}}{\binom{15}{9}}=\dfrac{3003-2002}{5005}=\dfrac{1001}{5005}=\dfrac{1}{5}$

Una generalización de este problema es el teorema de las votaciones de Bertrand, que dice que si en una elección, para la que hay dos candidatos A y B, A ha conseguido "a" votos y B tiene "b" votos a favor (b < a), la probabilidad de que durante el escrutinio de los votos siempre haya ido por delante el candidato A es $p = \frac{a-b}{a+b}$.

En nuestro caso $p = \frac{9-6}{9+6} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

Un recuento exhaustivo de todos los casos nos daría un diagrama de árbol como el siguiente



Notas: - *El papel de A y B están intercambiados respecto al enunciado del problema.*
- *Cada rama se va obteniendo cono la aparición de dos votos más.*
- *El número entre paréntesis cuenta el número de A y B que faltan por salir.*

Oposiciones de Secundaria. La Rioja 2015. Olimpíada Matemática Española 1980.