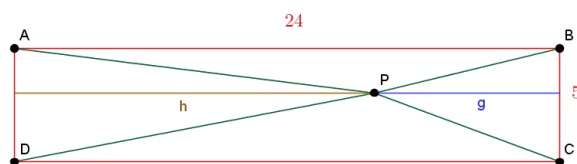


Seminario de problemas. Curso 2014-15. Soluciones hoja 3

15. P es un punto interior al rectángulo $ABCD$ de lados $AB = CD = 24$ y $AD = BC = 5$. ¿Cuál es la suma de las áreas de los triángulos PAD y PBC ?

Solución.

Con los datos de la figura



se tiene que

$$\text{Área } \triangle ADP = \frac{1}{2}5h, \quad \text{Área } \triangle BCP = \frac{1}{2}5g, \quad h + g = 24.$$

Por tanto,

$$\text{Área } \triangle ADP + \text{Área } \triangle BCP = \frac{1}{2}5h + \frac{1}{2}5g = \frac{1}{2}5(h + g) = 60.$$

16. Hallar todos los números naturales que empiezan por 6 y que al borrar el 6 inicial se obtienen números 25 veces menores.

Solución.

$$6a_1a_2 \dots a_k = 6 \cdot 10^k + x$$

donde x es un número de k cifras.

$$6 \cdot 10^k + x = 25x$$

$$6 \cdot 10^k = 24x$$

$$x = \frac{10^k}{4}$$

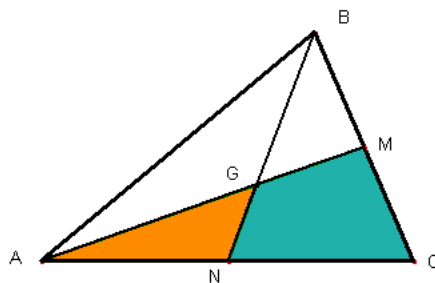
Si $k = 2$ entonces $x = 25$, el número es 625.

Si $k = 3$ entonces $x = 250$, el número es 6250.

Para $k \geq 2$ tenemos $x = 25 \cdot 10^{k-2}$, el número es $625 \cdot 10^{k-2}$

17. Se da el triángulo ABC y se trazan las medianas AM y BN , que se cortan en G . Calcular el área del cuadrilátero $GMCN$ en función del área de ABC .

Solución.



Si designamos por s el área del triángulo ABC , el área del triángulo ABN es $\frac{1}{2}s$.

El área del triángulo ANG es $\frac{1}{3}\frac{1}{2}s = \frac{1}{6}s$

El área del cuadrilátero $CMGN$ es $\frac{1}{2}s - \frac{1}{6}s = \frac{1}{3}s$

- 18.** Determina todos los enteros positivos n para los cuales $2^n + 1$ es divisible por 3.

Solución.

Consideremos congruencias módulo 3. Entonces

$$2 \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow 2^n \equiv (-1)^n \pmod{3} \Rightarrow 2^n + 1 \equiv [(-1)^n + 1] \pmod{3}.$$

Luego, si n es impar, $2^n + 1 \equiv 0 \pmod{3}$. Es decir, $2^n + 1$ es divisible por 3 para todo n impar. Además, si n es par se obtiene que $2^n + 1 \equiv 2 \pmod{3}$. Luego $2^n + 1$ no es nunca divisible por 3 si n es par.

- 19.** Nueve puntos, cualesquiera tres de ellos no alineados, están dentro de un triángulo equilátero de lado 4. Demostrar que al menos tres de ellos son vértices de un triángulo de área menor o igual que $\sqrt{3}$

Solución.

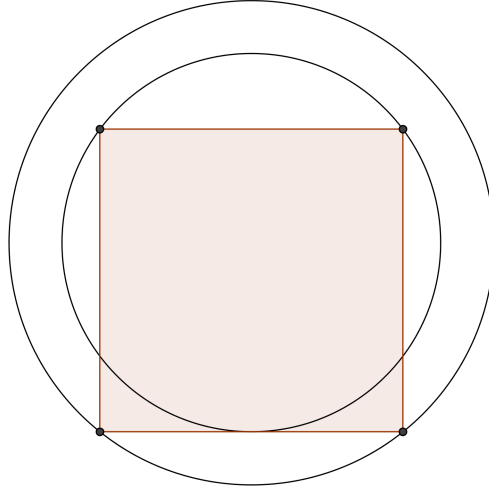
Un triángulo equilátero de lado 2 tiene de área $\sqrt{3}$. Por el principio del palomar, al menos uno de los 4 triángulos de lado 2 en que hemos dividido el triángulo de lado 4 contiene, en su interior, al menos 3 puntos. Este triángulo tiene área menor que $\sqrt{3}$.

- 20.** *Problema de la reunión.* Demostrar que en cualquier reunión de seis personas siempre habrá al menos tres que se conocen entre sí mutuamente, o bien al menos tres que son mutuamente desconocidas.

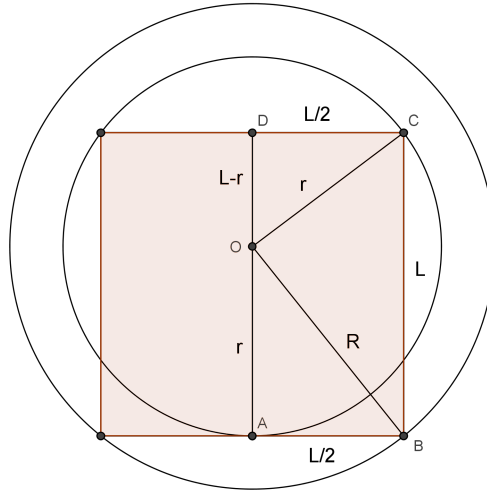
Solución.

Nos fijamos en una persona, llamémosla A , y consideramos la relación de ella o él con las otras cinco, llamémoslas B, C, D, E y F . Por el principio del palomar, A debe conocer al menos a tres de éstas, o no conocer al menos a tres de éstas. Supongamos, por ejemplo, que A ya conoce a C , a E y a F . Si algún par de éstas, por ejemplo las personas C y F , se conocen, entonces A, C y F son tres personas que se conocen mutuamente. Si ningún par de entre esas personas C, E y F se conocen, éstas son tres personas que se ven por primera vez. En el caso en que A vea por primera vez a tres de las otras cinco personas el argumento es idéntico al anterior. En cualquier caso se puede encontrar una terna de personas que, o bien se conocen entre sí mutuamente, o bien son mutuamente desconocidas.

- 21.** En una corona circular se inscribe un cuadrado de modo que uno de sus lados es tangente a la circunferencia menor (de radio r) y tiene sus dos vértices en la circunferencia mayor (de radio R). El lado paralelo al anterior tiene sus dos vértices en la circunferencia menor. Hallar la razón R/r .



Solución 1. Sea L el lado del cuadrado y O el centro de las circunferencias. Identificamos los radios r y R como muestra la figura.



Por un lado, en el triángulo $\triangle OAB$, por el teorema de Pitágoras, tenemos la relación $r^2 + \frac{L^2}{4} = R^2$, de donde

$$L = 2\sqrt{R^2 - r^2}. \quad (1)$$

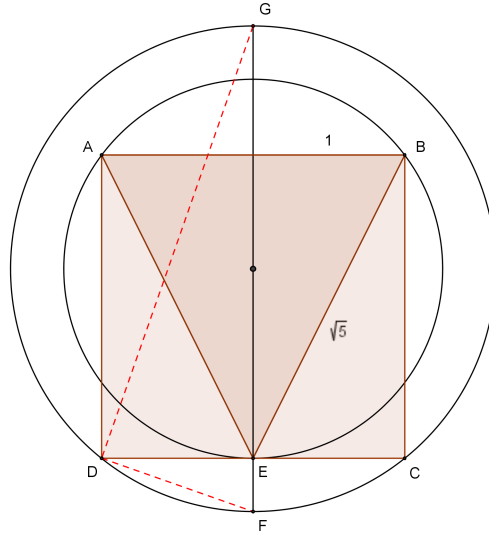
Por otro lado, en el triángulo $\triangle DOC$, por el teorema de Pitágoras, tenemos la relación $\frac{L^2}{4} + (1 - r)^2 = r^2$, de donde

$$L = \frac{8r}{5}. \quad (2)$$

Igualando (1) y (2), llegamos a la relación

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{41}{25} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{41}}{5}$$

Solución 2.



Pongamos que el lado del cuadrado tenga longitud 2. Entonces, el área del triángulo ABE de la figura es 2, y usando la fórmula que da el área de un triángulo en función de los lados y el circunradio, se tiene

$$2 = \frac{2 \cdot 5}{4r},$$

luego $r = 5/4$.

Por otra parte, aplicando el teorema de la altura al triángulo rectángulo DFG , se tiene

$$DE^2 = EF \cdot EG, \quad \text{es decir,} \quad 1 = (R - r)(r + R) = R^2 - r^2 = R^2 - \frac{25}{16},$$

luego $R = \sqrt{41}/4$ y $R/r = \sqrt{41}/5$.