Seminario de problemas   Curso 2015-16.   Soluciones Hoja 2

7. Sea r un número real tal que $\sqrt[3]{r}+\frac{1}{\sqrt[3]{r}}=3$. Determinar el valor de $r^3+\frac{1}{r^3}$.

Solución:

Si hacemos $b=a+\frac{1}{a}$ tendremos en general:

$$b^3=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3=a^3+3a+\frac{3}{a}+\frac{1}{a^3}=a^3+\frac{1}{a^3}+3b\Rightarrow a^3+\frac{1}{a^3}=b^3-3b$$

- Para $a=\sqrt[3]{r}$ y $b=3$ se tiene $r+\frac{1}{r}=3^3-3\cdot 3=18$
- Para $a=r$ y $b=18$ tendremos $r^3+\frac{1}{r^3}=18^3-3\cdot 18=5832-54=5778$

8. Hallar todas las soluciones enteras de la ecuación $x+y+z+xyz=xy+yz+zx+4$.

Solución:

Notemos que la simetría de la ecuación implica que si (α,β,γ) es una solución de la misma, también lo será cualquier permutación de ella.

Pongamos la ecuación en la forma $xyz-xy-xz-yz+x+y+z-1=3$

El primer miembro es fácil de factorizar:

$$xyz-xy-yz-zx+x+y+z-1=xy(z-1)-y(z-1)-x(z-1)+(z-1)=$$
$$=(z-1)\left[xy-y-x+1\right]=(z-1)\left[x(y-1)-(y-1)\right]=(z-1)(y-1)(x-1)$$

La ecuación queda, por tanto, en la forma $(x-1)(y-1)(z-1)=3$

Por ser enteros x, y, z tendremos las siguientes posibilidades (salvo permutaciones):

* $x\text{-}1=3,\ y\text{-}1=1,\ z\text{-}1=1\Rightarrow x=4,\ y=2,\ z=2$ y sus permutaciones.

* $x-1=3$, $y-1=-1$, $z-1=-1\Rightarrow x=4,\ y=0,\ z=0$ y sus permutaciones

* $x-1=-3,\ y-1=-1,\ z-1=1\Rightarrow x=-2,\ y=0,\ z=2$ y sus permutaciones.

Las soluciones son: (4,2,2), (2,4,2), (2,2,4), (4,0,0),(0,4,0), (0,0,4), (-2,0,2), (-2,2,0), (0,-2, 2), (0, 2,-2) , (2,-2, 0) y (2,0,-2)

9. Demostrar que un entero n puede expresarse como suma de dos cuadrados perfectos si y sólo si $2n$ puede expresarse como suma de dos cuadrados perfectos.

Solución:

Directo: supongamos $n=a^2+b^2$ con a y b enteros. En tal caso

$2n = 2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$. Es decir, 2n sería también expresable como suma de dos cuadrados perfectos.

Recíproco: supongamos $2n = c^2 + d^2$ con c y d enteros. Puesto que 2n es par, c y d han de ser de la misma paridad, por lo que $\frac{c+d}{2}$ y $\frac{c-d}{2}$ son ambos enteros.

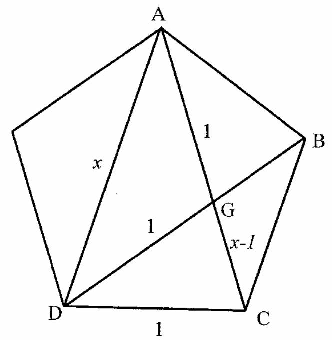
$n = \frac{c^2+d^2}{2} = \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-d}{2}\right)^2$. Es decir, n sería también expresable como suma de dos cuadrados perfectos.

10. a) Demostrar que en todo pentágono regular, la razón entre las medidas de una diagonal y el lado es $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (número áureo).

b) Al trazar las cinco diagonales de un pentágono regular obtenemos en su interior otro pentágono regular. Hallar en función de Φ la razón de semejanza entre ambos pentágonos regulares.

Solución:

a) Sin pérdida de la generalidad tomaremos como unidad el lado del pentágono. Sea x la medida de la diagonal.



De la figura se desprende que el triángulo ADC es isósceles de ángulos 72º, 72º, 36º.

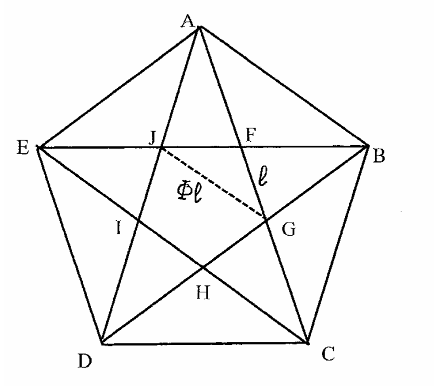
La diagonal DB corta a AC en G y es bisectriz De $\widehat{ADC}$, con lo que $\widehat{ADG} = \widehat{GDC} = 36^\circ$.

Por tanto $\widehat{DGC} = 72^\circ$

Luego los triángulos ADG y DGC son isósceles y en consecuencia DG=AG=1 y GC=x-1. Por otro lado, los triángulos ADC y DGC son semejantes ya que los ángulos de uno y otro son iguales.

De esta semejanza: $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x^2 - x = 1 \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi \\ \cancel{\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0} \end{cases}$ c.q.d.

b) Trazamos las diagonales, que nos determinan el pentágono FGHIJ y designamos por ℓ la longitud de su lado, que, a su vez será la razón de semejanza entre los pentágonos pequeño y grande (pequeño : grande). La simetría de la figura nos permite afirmar:



AG=AF+FG , es decir: $1 = \Phi - 1 + \ell$

Por tanto $\ell = 2 - \Phi$

Este resultado satisface las exigencias del enunciado, pero es mejorable en su aspecto. Lo mejoraremos utilizando astutamente la relación básica $\Phi^2 = \Phi + 1$

$$\ell = 2 - \Phi = \frac{2\Phi^2 - \Phi^3}{\Phi^2} = \frac{2\Phi^2 - \Phi^2 - \Phi}{\Phi^2} = \frac{\Phi^2 - \Phi}{\Phi^2} = \frac{1}{\Phi^2}$$

A esta misma solución se llega directamente utilizando la semejanza entre los triángulos ADB y JDG: $\frac{AB}{BD} = \frac{JG}{GD}$, es decir: $\frac{1}{\Phi} = \frac{\Phi\ell}{1} \Rightarrow \ell = \frac{1}{\Phi^2}$

La razón de semejanza es, por tanto, $\frac{1}{\Phi^2}$ (o también $2 - \Phi$).

11. Siendo *a*, *b* y *c* números reales positivos, demostrar la desigualdad

$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$$

Solución:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

Análogamente: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{b+c}$ *y* $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \geq \frac{4}{c+a}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{b+c} \\ \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \geq \frac{4}{c+a} \end{array}\right\} \text{ Sumando término a término: } \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a}$$

De aquí se obtiene la desigualdad propuesta $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$

(la igualdad se dará si *a*=*b*=*c*)

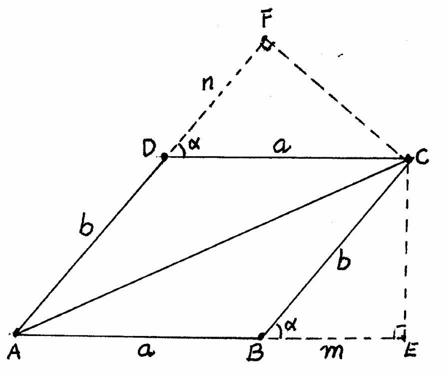
12. Sea AC la diagonal más grande de un paralelogramo ABCD. Desde C se trazan las perpendiculares a AB y AD. Sean E y F los pies de estas perpendiculares. Demostrar que

$$\overline{AB} \cdot \overline{AE} + \overline{AD} \cdot \overline{AF} = (\overline{AC})^2$$

Solución:

Llamemos $\begin{cases} a = \overline{AB} = \overline{DC} \;;\; b = \overline{BC} = \overline{AD}\;; \\ m = \overline{BE}\;;\; n = \overline{DF} \;\; y \;\; \alpha = \widehat{DAB} = \widehat{FDC} = \widehat{CBE} \end{cases}$

según indica la figura.



Los triángulos DFC y BEC son semejantes por tener sus ángulos iguales: $\dfrac{a}{n} = \dfrac{b}{m} \Rightarrow a\cdot m = b\cdot n$

El primer miembro de la igualdad requerida es

$a\cdot(a+m) + b\cdot(b+m) = a^2 + a\,m + b^2 + b\,n = a^2 + b^2 + 2a\,m$

*Los alumnos de Bachillerato habrán identificado ya el teorema del coseno aplicado al triángulo ABC: $\overline{AC}^{\,2} = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha = a^2 + b^2 + 2am$

*Los alumnos de ESO pueden suplir la carencia por dos aplicaciones del teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos AEC y BEC:

$\begin{cases} \overline{AC}^2 = (a+m)^2 + \overline{CE}^2 \\ b^2 = m^2 + \overline{CE}^2 \end{cases}$ Restando: $\overline{AC}^2 - b^2 = a^2 + 2am \Rightarrow \overline{AC}^2 = a^2 + b^2 + 2am$ c.q.d.