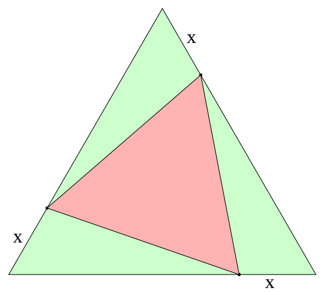
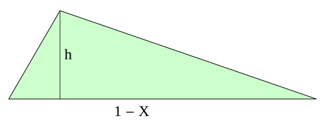
8. Los triángulos son equiláteros. Halla el cociente entre sus áreas.



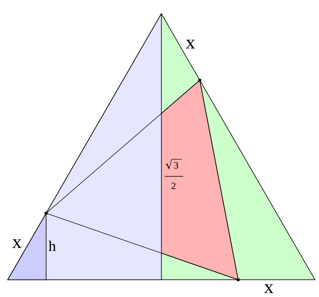
Solución.

Calculamos primero el área de uno de los tres triángulos verdes



$$\Delta = \frac{1}{2}(1-x)h$$

Para obtener la altura h usamos semejanza de triángulos



$$\frac{h}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x \Rightarrow \Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)x$$

Área del triángulo grande $= \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Área del triángulo pequeño $= \frac{\sqrt{3}}{4} - 3\frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)x$.

Cociente entre áreas $= 1 - 3(1-x)x$.

9. ¿Existe algún número mayor que 10, con todas sus cifras iguales, que sea un cuadrado perfecto?

Solución.

Si un número es un cuadrado perfecto o es divisible por 4 o deja resto 1 al dividir por 4. Escribimos

$$n^2 \equiv 0 \mod 4 \quad \text{o} \quad n^2 \equiv 1 \mod 4,$$

y se lee: n^2 congruente con 0 módulo 4 y n^2 congruente con 1 módulo 4, respectivamente.

Analicemos los números de la forma $11\cdots 111$. Todos ellos son congruentes con 3 módulo 4, ya que dejan resto 3 al dividir por 4, luego no pueden ser cuadrados perfectos. De aquí se deduce que tampoco son cuadrados perfectos los números de la forma

$$44\cdots 444 = 4\cdot(11\cdots 111), \quad 99\cdots 999 = 9\cdot(11\cdots 111).$$

Tampoco pueden ser cuadrados perfectos los números

$$22\cdots 222, \quad 33\cdots 333, \quad 77\cdots 777, \quad 88\cdots 888,$$

ya que los cuadrados perfectos no pueden terminar ni en 2, ni en 3, ni en 7, ni en 8.

Tampoco pueden ser cuadrados perfectos los números de la forma

$$55\cdots 555, \quad 66\cdots 666,$$

ya que los primeros son congruentes con 3 módulo 4 y los segundos lo son con 2.

10. Halla todos los números de seis cifras que cumplen las siguientes propiedades:

1. Es capicúa, es decir, es el mismo número si lo leemos de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.
2. Es múltiplo de 9.
3. Si quitamos la primera y la última cifra, el número de cuatro cifras que queda es múltiplo de 11.

Solución.

Por ser capicúa y tener 6 cifras, el número es de la forma

$$abccba.$$

Por ser múltiplo de 9, se tiene que cumplir

$$2(a+b+c) = 9k, \quad k = 2, 4, 6.$$

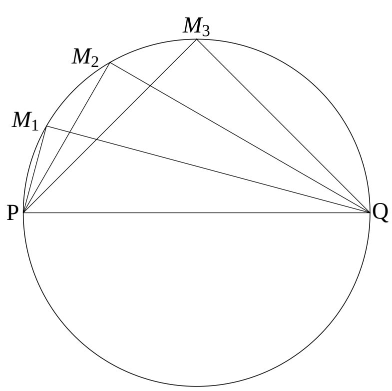
Si quitamos la primera y la última cifra, el número resultante es $bccb$, que siempre es múltiplo de 11, por lo que la tercera condición se cumple siempre. En la siguiente tabla se enumeran todos los números que cumplen las condiciones del enunciado del problema.

$k=4$			$k=2$			$k=6$
990099	819918	576675	900009	423324	180081	999999
981189	792297	567765	810018	414414	171171	
972279	783387	558855	801108	405504	162261	
963369	774477	549945	720027	360063	153351	
954459	765567	495594	711117	351153	144441	
945549	756657	486684	702207	342243	135531	
936639	747747	477774	630036	333333	126621	
927729	738837	468864	621126	324423	117711	
918819	729927	459954	612216	315513	108801	
909909	693396	396693	603306	306603		
891198	684486	387783	540045	270072		
882288	675576	378873	531135	261162		
873378	666666	369963	522225	252252		
864468	657756	297792	513315	243342		
855558	648846	288882	504405	234432		
846648	639936	279972	450054	225522		
837738	594495	198891	441144	216612		
828828	585585	189981	432234	207702		

11. Dados N puntos sobre una circunferencia de radio uno, prueba que existe un punto P, sobre la misma, de manera que la suma de distancias de los puntos dados a P es mayor que N.

Solución.

Sea PQ un diámero de la circunferencia, de manera que ni P ni Q sean ninguno de los puntos $M_1, M_2, \ldots, M_N$ dados.



Para cada punto M_k formamos el triángulo ΔPM_kQ y aplicamos la propiedad de que la suma de dos lados es mayor que el tercero

$$PM_k + QM_k > 2.$$

Por tanto $\sum_{k=1}^{N}(PM_k + QM_k) > 2N$ y o bien $\sum_{k=1}^{N} PM_k > N$ o $\sum_{k=1}^{N} QM_k > N$.

12. Dos de las alturas de un triángulo miden 1cm y 2 cm. Prueba que la tercera altura cumple $2/3 < h < 2$.

Solución.

Sean a, b y c los lados del triángulo, cuyas alturas correspondientes son 1, 2 y h respectivamente. Entonces, si A es el área del triángulo se tiene

$$A = \frac{1}{2}a, \quad A = b, \quad A = \frac{1}{2}c\,h.$$

Por tanto, podemos expresar los lados en función de A, de forma que

$$a = 2A, \quad b = A, \quad c = \frac{2A}{h}.$$

Aplicando la desigualdad triangular, como en el problema anterior, resulta

$$a + b > c \Rightarrow 3A > \frac{2A}{h} \Rightarrow h > \frac{2}{3}.$$

$$b + c > a \Rightarrow A + \frac{2A}{h} > 2A \Rightarrow h < 2,$$

por lo que

$$2/3 < h < 2.$$

13. Prueba que la ecuación $x^5 + y^5 + 2 = (x+1)^2 + (y+2)^2$ no tiene soluciones en números enteros.

Solución

La idea clave es fijarse en la paridad de los números x, y. Si ambos son pares, entonces el primer miembro de la ecuación es un número par, pues es la suma de tres números pares. Sin embargo, como x es par, $x+1$ es impar, lo mismo que $(x+1)^2$. Como $(y+2)^2$ es par, por serlo y, el segundo miembro es impar, al ser suma de uno impar y otro impar. Esto da lugar a una contradicción, ya que un número no puede ser al mismo tiempo par e impar.

Es fácil comprobar que cualquier otra combinación: x par, y impar; x impar, y par; x impar, y impar, también dan lugar a una contradicción, por lo que no pueden existir soluciones enteras de la ecuación.

14. Se considera el número 3025. Si tomamos los dos primeros dígitos (30) y los dos últimos (25), los sumamos (55) y elevamos dicha suma al cuadrado ($55^2 = 3025$), obtenemos el número de partida. Encuentra todos los números de cuatro dígitos, todos ellos distintos, con la misma propiedad.

Solución.

Un número M de cuatro cifras, puede escribirse como

$$M = 100b + a, \quad 0 \leq a \leq 99, \quad 10 \leq b \leq 99.$$

De esta forma, los números que se piden en el problema deben cumplir

$$(a+b)^2 = 100b + a = 99b + (a+b),$$

o lo que es lo mismo

$$(a+b)(a+b-1) = 99b. \qquad (*)$$

Observemos que 99 divide a $(a+b)(a+b-1)$ y que $a+b$ y $a+b-1$ son primos entre sí, por lo que solo pueden darse los siguientes casos

1. 99 divide a $(a+b)$ o 99 divide a $(a+b-1)$.
2. 9 divide a $(a+b)$ y 11 a $(a+b-1)$.

3. 11 divide a $(a+b)$ y 9 a $(a+b-1)$.

Caso 1.

Si $a+b=99k$, con k un entero positivo, usando (*) obtenemos $b=k(99k-1)$, por lo que k solo puede valer 1 y entonces

$$b=98, \quad a=1, \quad M=9801.$$

Si $a+b-1=99k$, entonces $b=(99k+1)k$ y no hay solución para ningún valor de k, ya que $b \leq 99$.

Caso 2.

Si $a+b=9k$ y $a+b-1=11j$, entonces

$$9k=1+11j,$$

por lo que $j=4+9l$, con $l \geq 0$. Es decir

$$(45+99l)(44+99l)=99b, \quad 10 \leq b \leq 99 \Rightarrow l=0.$$

Por tanto, $b=20$ y $a=25$ y $M=2025$, que no es una solución válida, al tener la cifra 2 repetida.

Caso 3.

Procediendo análogamente al caso 2, se obtiene $M=3025$, que es el número del ejemplo, por lo que solo hay otro número que cumpla la misma propiedad y que tenga los cuatro dígitos distintos y es el obtenido en el caso 1, $M=9801$.