132. Dada una semicircunferencia de diámetro $AB = 2R$, se considera la cuerda CD de longitud fija c. Sea E la intersección de AC con BD y F la intersección de AD con BC. Probar que el segmento EF tiene longitud constante y dirección constante al variar la cuerda CD sobre la circunferencia.

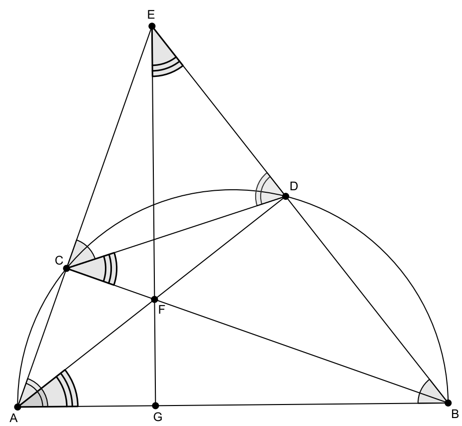

Figure 1: Cuerda $CD = c$ en una semicircunferencia

Solución. Ver la figura 1. El cuadrilátero $CFDE$ es cíclico y EF es el diámetro de la circunferencia circunscrita a dicho cuadrilátero. En efecto, como $\angle ACB = \angle ADB = 90^o$ por estar inscritos en un diámetro, se obtiene que $\angle ECF = 90^o$ y $\angle FDE = 90^o$ al ser suplementarios de los anteriores.

Por el teorema del seno en el triángulo CFD, como EF es el diámetro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo y como $\angle CFD$ es suplementario a $\angle DFB$, tenemos que

$$EF = \frac{CD}{\operatorname{sen} \angle CFD} = \frac{CD}{\operatorname{sen}(90^o + \angle FBD)} = \frac{CD}{\cos \angle FBD}.$$

Como CD es constante y $\angle FBD$ también (por ser constante el arco que abarca) deducimos que EF es constante.

Además, si llamamos G a la intersección de EF con AB, tenemos que

$$\angle EGB = 180^o - (\angle GBE + \angle GEB) = 180^o - (\angle ECD + \angle DCF) = 180^o - \angle ECF = 90^o.$$

Así, la dirección de EF es siempre perpendicular a AB.

Teorema del seno. En un triángulo de lados a, b, c, ángulos A, B, C y radio de la circunferencia circunscrita es R, se cumple

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R.$$

133. Si a, b, c son lados de un triángulo de área (ABC), probar que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}(ABC).$$

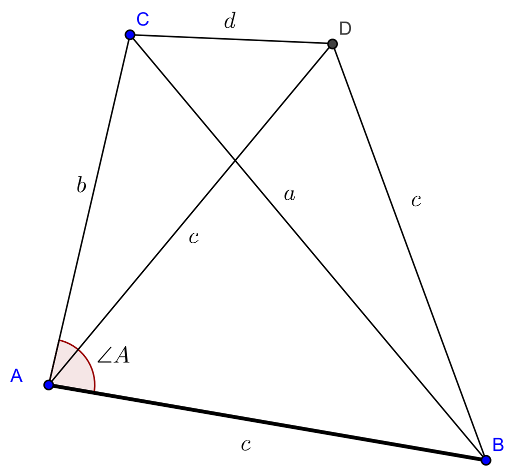

Figure 2: El triángulo ADB es equilátero

Solución. Si el triángulo dado es equilátero, entonces se cumple la igualdad en la desigualdad anterior. Observar que un triángulo equilátero de lado a tiene área $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. Para demostrar la desigualdad dada, supongamos que el triángulo ABC no es equilátero. Los ángulos adyacentes al lado AB no pueden ser ambos iguales a 60^o, de modo que suponemos que el ángulo $\angle A \neq 60^o$. Construimos un triángulo equilátero con lado AB, ver la figura 2. Aplicando el teorema del coseno en los triángulos ADC y ABC se obtiene

$$\begin{aligned} d^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A-60) &= b^2 + c^2 - 2bc(\cos 60^o \cos A + \operatorname{sen} 60^o \operatorname{sen} A) \\ &= b^2 + c^2 - bc\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) - \sqrt{3}bc \operatorname{sen} A \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - 2\sqrt{3}(ABC), \end{aligned}$$

de donde sigue la desigualdad que queríamos probar.

134. Probar que para cualesquiera números reales a, b tales que $0 < a, b < 1$ se cumple

$$\sqrt{ab^2 + a^2b} + \sqrt{(1-a)(1-b)^2 + (1-a)^2(1-b)} < \sqrt{2}.$$

Solución. Utilizaremos la desigualdad de Jensen. Como la función $f(t) = \sqrt{t}$, $t \geq 0$ es cóncava en $[0, \infty)$, si a es un número positivo y menor que 1, x e y números positivos

$$a\sqrt{x} + (1-a)\sqrt{y} \leq \sqrt{ax + (1-a)y},$$

que en el caso que nos ocupa es equivalente a $0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$. Como $0 < a+b < 2$, $0 < 2-(a+b) < 2$, tenemos

$$\sqrt{ab^2 + a^2b} + \sqrt{(1-a)(1-b)^2 + (1-a)^2(1-b)} < \sqrt{2}\left(\sqrt{ab} + \sqrt{(1-a)(1-b)}\right).$$

De modo que es suficiente probar que

$$\sqrt{ab} + \sqrt{(1-a)(1-b)} \leq 1.$$

Utilizando la desigualdad de Jensen obtenemos

$$\sqrt{ab}+\sqrt{(1-a)(1-b)}=a\sqrt{\frac{b}{a}}+(1-a)\sqrt{\frac{1-b}{1-a}}\leq\sqrt{a\frac{b}{a}+(1-a)\frac{1-b}{1-a}}=1.$$

Otra solución. Esta es la solución oficial, que utiliza la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica.

Como $0<(a+b)/2<1$, $0<(2-(a+b))/2<1$, y la raíz cuadrada de un número entre cero y uno es menor que su raíz cúbica,

$$\begin{aligned}\sqrt{ab\frac{a+b}{2}}+\sqrt{(1-a)(1-b)\frac{2-(a+b)}{2}}&<\sqrt[3]{ab\frac{a+b}{2}}+\sqrt[3]{(1-a)(1-b)\frac{2-(a+b)}{2}}\\&\leq\frac{a+b+\frac{a+b}{2}}{3}+\frac{(1-a)+(1-b)+\frac{2-(a+b)}{2}}{3}=1\end{aligned}$$

que equivale a lo que se quería probar.

135. Hallar el menor entero positivo n tal que sus cuatro divisores más pequeños satisfacen

$$d_1<d_2<d_3<d_4,\quad \text{y}\quad n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2.$$

Solución. El valor de n es 130.

Como $d_1<d_2<d_3<d_4$ son los divisores más pequeños de n, entonces $d_1=1$.

Además, d_2, d_3, d_4 no pueden ser impares, es decir, $d_2\neq 2$ o lo que es equivalente, n impar. Ya que en ese caso, $n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2\equiv 0\neq 1\equiv n$, (mód. 2); luego d_2=2.

También, d_3, d_4 no pueden ser ambos pares ni impares a la vez porque en ambos casos, trabando mód. 2 obtenemos una contradicción. Por ejemplo, si $d_3\equiv d_4\equiv 1 \pmod 2$, entonces $n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2\equiv 1 \pmod 2$ ó $d_3\equiv d_4\equiv 0 \pmod 4$ que contradice que n es par, entonces $n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2\equiv 1 \pmod 4$, que también contradice que n es par.

Además, 4 no puede dividir a n, o sea, $d_3\neq 4$, porque en caso contrario $n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2\equiv 2 \pmod 4$, que no es posible si n es divisible por 4.

Así, d_3 tiene que ser un número primo mayor o igual que 3 y d_4 dos veces ese número primo: $d_3=p$, $d_4=2p$. Por tanto,

$$n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2=5(1+p^2)\Rightarrow d_3=5,\ d_4=10\Rightarrow n=130.$$

Observar que $130=1^2+2^2+5^2+10^2=1\times 2\times 5\times 13$.

136. Hallar todas las funciones $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ que para todo $(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ verifican las condiciones siguientes:

$$\begin{gathered}f(x,x)=x,\quad f(x,y)=f(y,x),\\(x+y)f(x,y)=yf(x,x+y),\end{gathered}\tag{1}$$

donde $\mathbb{N}$ representa el conjunto de números naturales $\{1,2,\dots\}$.

Solución. La única función f que satisface las condiciones del problema es

$$f(x,y)=[x,y],$$

donde $[x,y]$ representa el mínimo común múltiplo de x, y.

Observar que si $x = da$, $y = db$, con a, b primos relativos $(a,b) = 1$, entonces

$$[x,y] = dab.$$

Se comprueba fácilmente que $f(x,y) = [x,y]$ satisface las condiciones del problema.

También se comprueba trivialmente por inducción que $f(1,n) = f(n,1) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; en efecto,

$$f(1,1) = 1,$$

y si para cierto $k \geq 1$,

$$f(1,k) = k,$$

eligiendo $x = 1$, $y = k$, en (1), nos queda

$$(k+1)f(1,k) = kf(1,k+1) \Leftrightarrow k+1 = f(1,k+1).$$

Observemos ahora que si f es una solución del problema y para ciertos naturales x, y se tiene $f(x,y) = [x,y]$, entonces también

$$f(x, x+y) = [x, x+y]. \tag{2}$$

Si $x = da$, $y = db$ con $(a,b) = 1$, entonces sustituyendo en (1), nos queda

$$\begin{aligned}(da+db)f(da,db) = dbf(da,da+db) \Leftrightarrow f(x,x+y) &= f(da,da+db)\\ &= da(a+b) = [x,x+y].\end{aligned}$$

Probemos que la única solución del problema es $f(x,y) = [x,y]$. Lo haremos por inducción en n, donde $\max\{x,y\} \leq n$. Es trivial que la afirmación es cierta para $n = 1$. Supongamos que es cierta para todo (x,y), con $\max\{x,y\} \leq k$. Veamos que es cierta todo $\max\{a,b\} \leq k+1$. Entonces basta considerar el caso $a = k+1$ e $b \leq k$ y según (2) con $x = b \leq k$, $y = a - b = k + 1 - b \leq k$ nos queda

$$f(b, k+1) = f(b,a) = f(b, b+a-b) = [b, k+1].$$

137. Determinar todos los números enteros $n \geq 2$ tales que existen enteros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cumpliendo la condición si $0 < i < n$, $0 < j < n$, y n divide a $2i + j$, entonces $x_i < x_j$.

Solución. Precisamos el problema: *Determinar todos los números enteros $n \geq 2$ tales que existen enteros $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ cumpliendo la condición si $0 < i < n$, $0 < j < n$, $i \neq j$ y n divide a $2i + j$, entonces $x_i < x_j$.*

Veamos que los valores de n solución de nuestro problema son $n = 2^k$, $k \geq 1$ y $n = 3\,2^k$, $k \geq 0$.

Es obvio que $n = 2$ satisface las condiciones del problema eligiendo x_1 cualquier número entero. Consideremos $n \geq 3$ para que algunas relaciones que siguen tengan sentido. Para abreviar, denotemos por $H_n = \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Observar que si i, j están en H_n, entonces $2i$ está en $\{2, 4, \ldots, 2n-2\}$, $2i + j$ está en $\{3, 4, \ldots, 3n-3\}$. Por tanto, n divide a $(2i+j)$ si y sólo si $2i + j = n$ ó $2i + j = 2n$.

Observar que cuando $n/2$ es entero, e $i = n/2$, no existe un valor de j en H_n tal que n divide a $(2i + j)$ (tendríamos que tomar $j = 0$ ó múltiplo de n). Si $i = n/3$ es entero, entonces n divide a $2i + j$ si y sólo si $j = n/3$. Si $i = 2n/3$ es entero, entonces n divide a $2i + j$ si y sólo si $j = 2n/3$.

Sea Q_n aquellos valores en H_n distintos de $\{n/3, n/2, 2n/3\}$. Para cada i en Q_n existe un único valor $j = f(i)$ en H_n tal que n divide a $(2i + j)$. Se tiene $f(i) \equiv (-2i) \pmod{n}$. De modo que la función $f : Q_n \to H_n$ está bien definida. Observar $x_i < x_{f(i)}$. Observar que, según lo que se dice en el párrafo anterior, cuando f alcanza los valores $n/3$, $n/2$ ó $2n/3$, a partir de estos *no puede continuar* (no sólo porque no la hemos definido para estos valores si no que el j correspondiente coincide con el i ó es cero).

El valor n tendrá las propiedades del problema si y sólo si para todo i en Q_n se tiene existe k tal que $f^k(i) = n/3$, $= n/2$ ó $= 2n/3$, donde $f^k(i)$ se entiende como la composición de f con ella misma k veces evaluada en i. En efecto, si existe un valor i en Q_n que no cumple esta propiedad, como $i, f(i), \ldots, f^{n-3}(i)$ son $n - 2$ elementos distintos de Q_n que tiene $n - 3$ se tiene que hay dos iguales. Pero si $k_1 < k_2$ y $f^{k_1}(i) = f^{k_1}(i)$, esto contradice que $x_{f^{k_1}(i)} < x_{f^{k_2}(i)}$ por que $x_i < x_{f(i)} < x_{f^2(i)} < \cdots < x_{f^{n-3}(i)}$. Si n tiene esta propiedad: que todo i en Q_n existe k tal que $f^k(i) = n/3$ ó $= 2n/3$ y consideramos $k = k(i)$ el menor valor de k tal que $f^k(i)$ es uno de esos tres valores. Si para i en Q_n $x_i = -k(i)$ y $x_i = 0$ para $i = n/2$, $i = n/3$ e $i = 2n/3$. Entonces claro que n divide a $2i + j$, e i j están en Q_n, se tiene que $j = f(i)$, entonces $k(i) > k(j) \Leftrightarrow -k(i) < -k(j)$ y los otros casos se analizan de igual forma.

De lo dicho en el párrafo anterior, se tiene que para cada i en Q_n existe k tal que $(-2i)^k = f^k(i) \equiv n/3$, $\equiv n/2$ ó $\equiv 2n/3$. Tomando $i = 1$, se obtiene $n = 2^k$, $k \geq 1$ ó $n = 3\,2^k$, con $k \geq 0$.

138. Sea n un entero positivo. En cada una de las n cajas tenemos una cantidad no negativa de piedras. En cada movimiento está permitido coger dos piedras de una caja, eliminar una de esas piedras y la otra piedra ponerla en otra caja. Una configuración de piedras en las cajas se dice soluble si con los movimientos permitidos es posible alcanzar, en un número finito (posiblemente cero) de movimientos, una configuración de piedras con ninguna caja vacía. Determinar todas las configuraciones iniciales de piedras que no son solubles, pero se convierten en solubles después de poner una piedra en una caja, cualquiera sea la caja que se elija.

Solución. Todas las configuraciones con $2n - 2$ piedras, con un número par de piedras en cada caja, cumplen que no son solubles pero se convierten en solubles después de poner una piedra en cualquier caja.

Es obvio que la afirmación es cierta para $n = 1$. En los razonamientos que siguen consideramos $n \geq 2$.

Para probar lo anterior consideremos las cajas numeradas de 1 hasta n y el vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que x_j es la cantidad de piedras que hay en la caja $j-$ésima, $j = 1, \ldots, n$. A tal vector x le llamaremos configuración. Las afirmaciones 1 y 2 que daremos a continuación nos ayudan a entender lo que ocurre al realizar movimientos permitidos en diferentes configuraciones.

Afirmación 1. Si de una caja en la configuración x extraemos dos bolas y las ponemos en otra caja se obtiene una nueva configuración $\tilde{x}$. La configuración x es soluble si y sólo si $\tilde{x}$ también lo es. Para demostrar esto consideremos que las dos bolas de la caja C en la configuración x se mueven a la caja $\tilde{C}$ de la configuración $\tilde{x}$. Si tenemos una sucesión de movimientos que transforma x en una configuración con todas las cajas no vacías, entonces la misma sucesión de movimientos aplicados en $\tilde{x}$ excepto la primera vez que se sacan dos bolas de la caja C, que en $\tilde{x}$ se extraen de la caja $\tilde{C}$ y la que no se desecha se pone en la misma caja que se ponía cuando se extraen de C. Observar que después de ese movimiento las dos configuraciones a las que se llega son iguales. Mientras que si en la caja C no se realizan extracciones, entonces el último movimiento que hacemos en $\tilde{x}$, después de haber realizado los mismos que sobre x, es extraer dos piedras de $\tilde{C}$ y poner la que no se desecha en C. De igual forma si tenemos una sucesión de movimientos que transformen a $\tilde{x}$. La justificación de esto está en que en todas las cajas distintas de C y $\tilde{C}$ hay la misma cantidad de piedras y se hacen los mismos movimientos. En las cajas C y $\tilde{C}$ está claro que el segundo grupo de movimientos realizados no las dejan sin piedras si el primer grupo no las dejaron.

Diremos que dos configuraciones son *equivalentes* si tienen igual total de piedras y también coincide la paridad de la cantidad de piedras en cada caja. Según la afirmación 1, dos configuraciones equivalentes son solubles o insolubles. En particular, cualquier configuración con más de $2n-1$ piedras es siempre soluble porque es equivalente a una configuración con todas las cajas no vacías. De modo que las configuraciones insolubles tienen $\leq 2n-2$ piedras.

Una configuración donde todas las cajas contienen dos o menores piedras la llamaremos *escasa*. Toda configuración insoluble es equivalente a una configuración escasa. Si una configuración es insoluble pero no escasa, tiene alguna caja vacía y alguna caja con tres o más piedras, de esa caja podemos mover dos piedras a la caja vacía de modo que se tiene una configuración equivalente. Este proceso se puede repetir mientras en una caja hayan tres o más piedras. De modo que la configuración solución del problema es escasa.

Afirmación 2. Una configuración escasa es soluble si y sólo si no tiene una caja vacía. En efecto, cualquier movimiento en una configuración escasa deja el mismo número de cajas vacías y el resultado después de ese movimiento es una configuración escasa o incrementa en uno la cantidad de cajas vacías, sacando dos piedras de una caja dejándola vacía y la piedra resultante se pone en una caja donde había dos o una piedra. Si se pone la piedra donde había una, la nueva configuración sigue siendo escasa. Si se pone en una de dos piedras obteniendo una caja con tres piedras, esta nueva configuración es equivalente a una escasa con la misma cantidad de cajas vacías que la que dio origen a ella. Así todos los movimientos en una configuración escasa son equivalentes a una configuración escasa con igual cantidad de cajas vacías que la original o una más.

Por las afirmaciones 1 y 2, la adición de una piedra a una configuración escasa insoluble que tiene una única caja vacía, la hace soluble si la piedra la ponemos en la única caja vacía de la configuración escasa o en una caja con dos piedras. Por tanto, la adición de una piedra hace soluble una configuración escasa insoluble independiente de la caja donde pongamos la piedra si y sólo si la configuración tiene todas las cajas con un número par de piedras y exactamente una caja vacía, o sea la configuración escasa tiene $2n-2$ piedras con un número par de piedras en cada caja.