1. El número de seis cifras que aparece en este sello de Japón solo tiene dos factores primos distintos.

Calcula la suma de todos sus divisores.

Solución.

260704	2
130352	2
65176	2
32588	2
16294	2
8147	8147
1	

Al tener solo dos factores primos y uno de ellos ser el 2, se va dividiendo por 2 hasta que aparece un cociente impar que debe ser por tanto un número primo. Así, $260704 = 2^5 \cdot 8147$

Los divisores a sumar son:

$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 8147 \cdot 1 + 8147 \cdot 2 + 8147 \cdot 4 + 8147 \cdot 8 + 8147 \cdot 16 + 8147 \cdot 32 =$

$= 63 + 8147 \cdot 63 = 63 \cdot 8148 = 513224$

2. Fíjate en la hora que marca este reloj del siglo XIX que se encuentra en el Palacio Real de La Granja de San Ildefonso.

a) ¿A qué hora formarán las agujas, por primera vez, un ángulo de 90º?

b) ¿Cuándo fue la última vez que las agujas formaron un ángulo de 45 º?

Solución.

Fig. 1

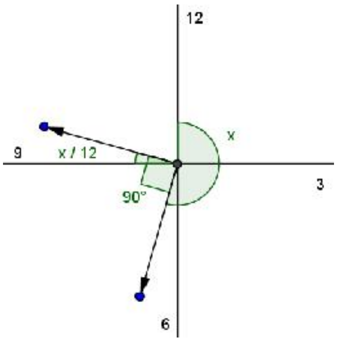
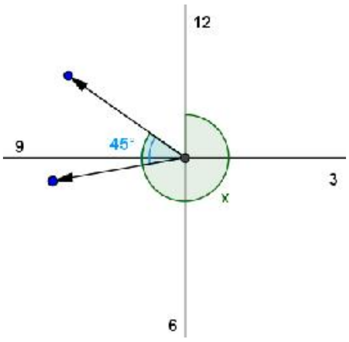


Fig. 2



a) *Siendo x el ángulo que forma la aguja de los minutos con las 12h (Fig. 1).*

$$x - 180^o = \frac{1}{12}x \;\Rightarrow\; 12x - 2160^o = x \;\Rightarrow\; 11x = 2160^o \;\Rightarrow\; x = \frac{2160^o}{11} = 196{,}\overline{36}^o$$

Como 1 minuto = 6º: $196{,}\overline{36}^o = 32{,}\overline{72}\,minutos = 32\,minutos\,43{,}\overline{63}\,segundos$.

Por tanto formarán el ángulo de 90º a las $9h\,32'\,43{,}\overline{63}''$

b) *Siendo y el ángulo que forma la aguja de los minutos con las 12h (Fig. 2).*

$$y - 45^o = 240^o + \frac{1}{12}y \;\Rightarrow\; 12y - 540^o = 2880^o + y \;\Rightarrow\; 11y = 3420^o \;\Rightarrow\; x = \frac{3420^o}{11} = 310{,}\overline{90}^o$$

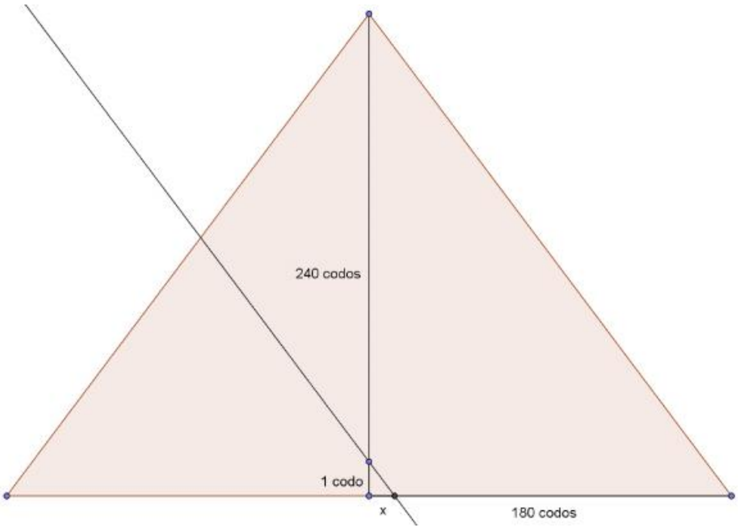
Como 1 minuto = 6º: $310{,}\overline{90}^o = 51{,}\overline{81}\,minutos = 51\,minutos\,49{,}\overline{09}\,segundos$.

Por tanto formarán el ángulo de 45º a las $8h\,51'\,49{,}\overline{09}''$

3. Problema 56 del papiro de Rhind. El seked es lo que hoy conocemos por pendiente de una superficie plana inclinada y se obtiene al poner verticalmente un codo y medir horizontalmente en palmos y dedos (1 codo = 7 palmos = 28 dedos).

¿Cuál es el seked de la cara de una pirámide de 240 codos de altura y 360 codos de lado de la base? Dar el resultado en palmos y dedos.

Solución.



$$\frac{240\,codos}{180\,codos}=\frac{1\,codo}{x}$$

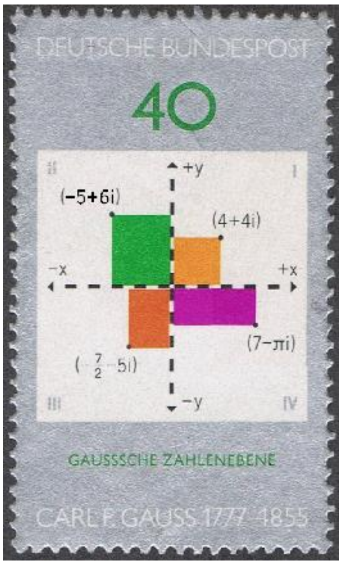
$$\Rightarrow\quad x=\frac{180}{240}=\frac{3}{4}codo$$

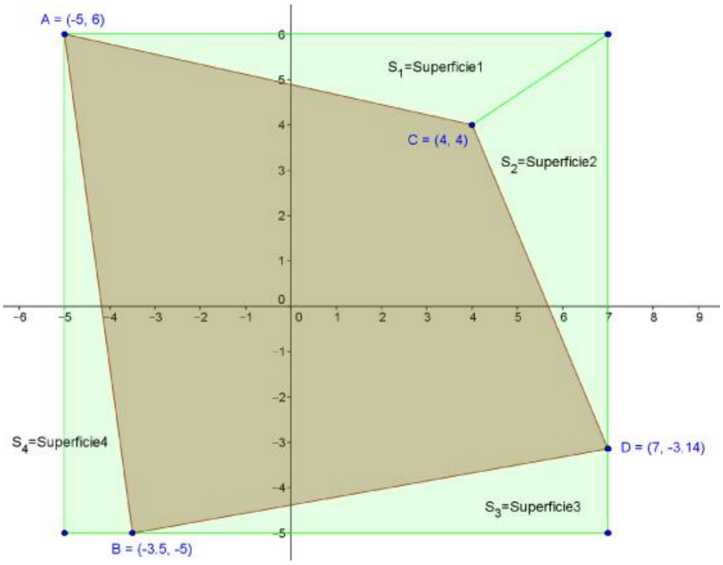
$$\frac{3}{4}codo\cdot 7\ palmos/codo=\frac{21}{4}\ palmos=5\frac{1}{4}\ palmos=5\ palmos\ y\ 1\,dedo$$

4. Los cuatro puntos del plano complejo que se ven en el sello en cada uno de los cuatro cuadrantes se pueden considerar también como puntos del plano real donde por ejemplo -5+6i es el punto (-5,6).

Determina el área del cuadrilátero que se obtiene al unir los cuatro puntos.

Solución.





$$S_1=\frac{12\cdot 2}{2}=12\,u^2\ ,\ S_2=\frac{(6+\pi)\cdot 3}{2}=9+1{,}5\,\pi\,u^2\ ,\ S_3=\frac{10{,}5\cdot(5-\pi)}{2}=26{,}25-5{,}25\,\pi\,u^2\ ,\ S_4=\frac{11\cdot 1{,}5}{2}=8{,}25\,u^2$$

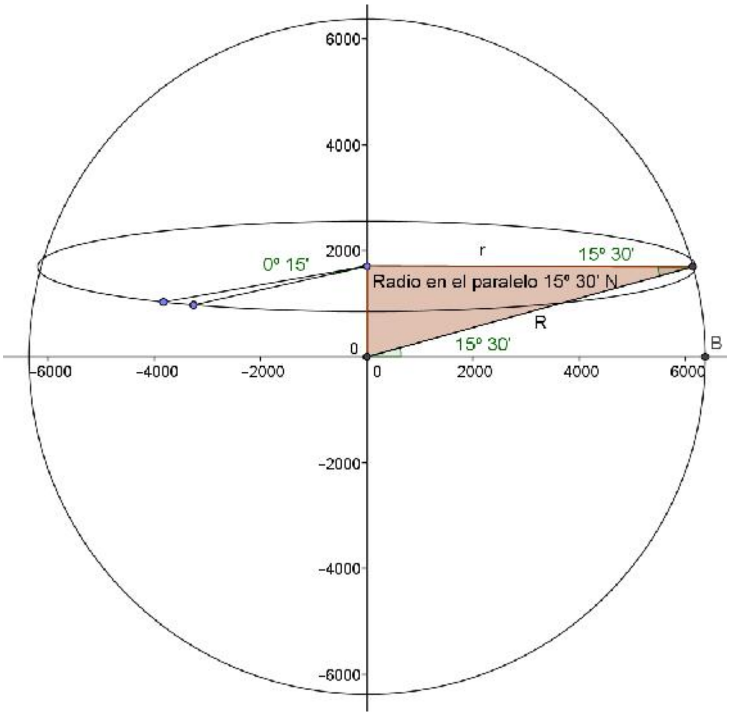
Por tanto, la *superficie solicitada es la del rectángulo exterior menos la de los cuatro triángulos:*

$$S_{total}=12\cdot 11-(S_1+S_2+S_3+S_4)=132-(12+(9+1{,}5\pi,+(26{,}25-5{,}25\pi,+8{,}25)=76{,}5+3{,}75\pi\,u^2$$

Aproximadamente 88,281 u^2.

5. **A la isla Dominica la atraviesa el paralelo 15º 30' N. ¿Cuál es la anchura aproximada de la isla en ese paralelo sabiendo que sus extremos Este y Oeste se encuentran en los meridianos 61º 15' O y 61º 30' O, si suponemos que la Tierra es esférica de radio 6371Km.?**

Solución.



$$cos(15º30'\ ) = \frac{r}{R} \quad \Rightarrow \quad r = R \cdot cos(15º30'\ ) = 6371 \cdot cos(15º30'\ ) = 6139{,}290\,km$$

La anchura aproximada de la isla es la longitud del segmento circular entre los meridianos 61º 15' O y 61º 30' O (amplitud de 0º 15’ = 0,25º.

$$Anchura\ de\ la\ isla = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360º} = \frac{2\pi 6371 \cdot cos(15º30'\ ) \cdot 0{,}25º}{360º} = 26{,}788\,km$$

6. **Un depósito de 150 litros de vino contiene un 3% de agua.**

¿Cuánto vino habrá que añadir para que solo tenga un 2 % de agua?

Solución.

3% de 150 litros son 4,5 litros de agua y, por tanto, 145,5 litros de vino.

Si añadimos x litros de vino tendremos 4,5 litros de agua, 145,5+x litros de vino y 150+x litros en total.

Por tanto 4,5 litros = 2% de 150+x.

$$4{,}5 = \frac{2 \cdot (150 + x)}{100} \quad \Rightarrow \quad 450 = 300 + 2x$$

$$\Rightarrow \quad 2x = 150 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{150}{2} = 75\,litros$$

7. **La rueda dentada con la letra "E" tiene 32 piñones o dientes, la "U" tiene 9, "R" tiene 12, "O" tiene 18 tanto exterior como interiormente, en "P" hay 28 y la que tiene la letra "A", 56 piñones.**

Cuando la rueda "R" haya dado 1000 vueltas en el sentido de las agujas del reloj, ¿cuántas vueltas habrán completado "A" y "E" y en qué sentido habrán girado?

Solución.

Al haber dado la rueda "R" 1000 vueltas, habrá avanzado $12 \cdot 1000 = 12000$ *piñones.*

a) Independientemente de las vueltas que de la rueda "U", la rueda "E" dará

$$12000 : 32 = 375 \text{ vueltas}$$

en el mismo sentido de las agujas del reloj.

b) Independientemente de las vueltas que den las ruedas "O" y "P", la rueda "A" dará

$$12000 : 56 = 214,\overline{285714} \text{ vueltas.}$$

Así que 214 vueltas completadas en el sentido contrario de las agujas del reloj.

Estos sellos muestran tres ilusiones ópticas.

¿Te parecen las figuras imposibles? Descárgate los correspondientes recortables y tras montarlos prueba a ver la figura desde el punto adecuado.

http://www.geocities.jp/ikemath/album/illusion.html

Calendarios matemáticos: http://www.semcv.org/calendarimat/730-calendari-2014-2015