Seminario de problemas. Curso 2013-14. Hoja 1

1. Un ciclista sube una colina a 30 km/h y la baja a 90 km/h. ¿Cuál es su velocidad media en el trayecto completo?

Solución.

Supongamos que la longitud de la colina es d km. El tiempo en la subida son $d/30$ h, y el tiempo en la bajada son $d/90$ h. Por lo tanto, la velocidad media es

$$\frac{2d}{\frac{d}{30}+\frac{d}{90}} = \frac{2}{\frac{1}{30}+\frac{1}{90}} = 45 \text{ km/h},$$

es decir, la *media armónica* de las velocidades. La media armónica siempre es menor que la media aritmética.

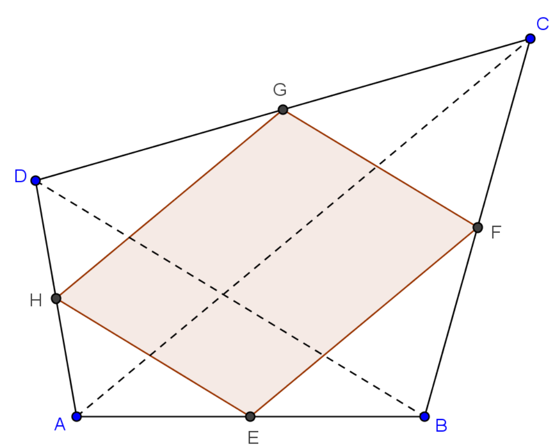
2. Un hombre está atravesando a pie un puente de ferrocarril. Cuando lleva cruzados los $4/7$ de la longitud del puente, ve que se acerca un tren hacia él. Dado que el hombre puede correr a 20 km/h, sabemos que tiene el tiempo justo para, o bien correr hacia el tren y salir del puente por el lado de allá, o bien correr en sentido contrario y salir del puente por el lado de acá. ¿A qué velocidad viene el tren?

Solución.

El hombre se puede encontrar con el tren en el extremo de allá del puente después de correr $3/7$ de la longitud del mismo. Cuando haya recorrido esa misma distancia corriendo hacia el extremo de acá del puente, el tren estará en el extremo de allá y en ese mismo momento él está a $1/7$ de la longitud del puente de distancia del extremo de acá. Como el tren lo va a alcanzar al llegar al extremo de acá del puente, el tren va 7 veces más deprisa que el hombre, es decir, a 140 kilómetros por hora.

3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Sean E, F, G y H los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA respectivamente. ¿Cuál es la relación entre las áreas de los cuadriláteros $EFGH$ y $ABCD$?

Solución.



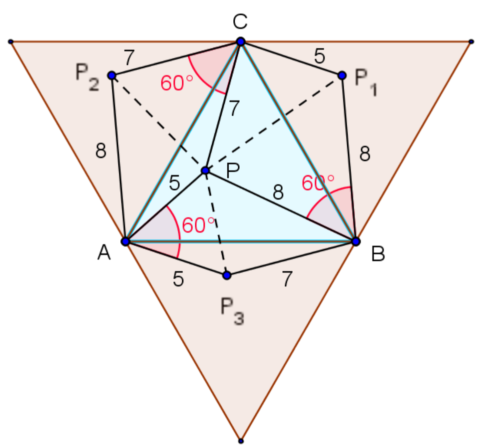
Supongamos que el cuadrilátero es convexo, como en la figura (el caso cóncavo es similar). Trazamos los segmentos AC y BD. Por semejanza de triángulos, el área del $\triangle AEH$ es un cuarto del área del $\triangle ABD$. De la misma forma, el área del $\triangle CFG$ es un cuarto del área del $\triangle CBD$. Por tanto, el área conjunta de los triángulos AEH y CFG es un cuarto del área del cuadrilátero $ABCD$.

Análogamente, el área conjunta de los triángulos DGH y BEF es un cuarto del área del cuadrilátero $ABCD$. Se sigue que el área de los cuatro triángulos AEH, CFG, DGH y BEF juntos es la mitad del área del cuadrilátero $ABCD$. Por lo tanto, el área complementaria, que es la del cuadrilátero $EFGH$, es la mitad del área de $ABCD$.

Nota. También nos habremos dado cuenta de que el cuadrilátero $EFGH$ es un paralelogramo. Es el *paralelogramo de Varignon*.

4. Sea P un punto interior de un triángulo equilátero ABC tal que $PA = 5$, $PB = 7$ y $PC = 8$ cm. Halla la longitud del lado del $\triangle ABC$.

Solución.



Girando 60° el punto P en torno a cada vértice del triángulo equilátero ABC, resultan los puntos P_1, P_2 y P_3 (figura).

El área del hexágono $AP_3BP_1CP_2$ es, por una parte, el doble del área del $\triangle ABC$. Y, por otra parte, se compone de tres triángulos equiláteros de lados 5, 7 y 8 respectivamente, y de tres triángulos iguales entre sí de lados 5, 7 y 8.

Entonces, si el lado del $\triangle ABC$ es ℓ, se tiene (fórmula de Herón)

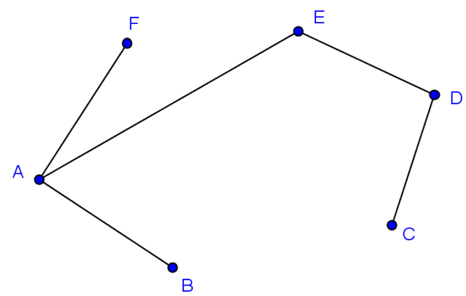
$$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{49\sqrt{3}}{4} + \frac{64\sqrt{3}}{4} + 3\sqrt{10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2},$$

de donde resulta $\ell = \sqrt{129}$.

5. De un grupo de seis amigos, se sabe que exactamente dos de ellos han estado robando manzanas. ¿Pero quiénes? Felipe dice que han sido Alberto y Bernabé; Carlos dice que han sido Daniel y Ernesto; Daniel dice que han sido Ernesto y Alberto; Bernabé dice que han sido Felipe y Alberto; Alberto dice que han sido Daniel y Carlos. A Ernesto no lo hemos podido localizar para preguntarle. Se sabe que cuatro de los cinco interrogados han nombrado correctamente a uno de los implicados y han mentido acerca del otro, y que el otro interrogado ha mentido completamente. ¿Quiénes han sido entonces?

Solución.

Con la información obtenida podemos construir un grafo de seis vértices, con un vértice para cada chico y una arista (cinco en total) uniendo cada pareja nombrada en los interrogatorios.



Cuatro de las aristas unen un inocente con un culpable, y la arista restante une dos inocentes. Así que los culpables ocupan cuatro de los diez extremos de las aristas, y los inocentes ocupan los otros seis extremos. Como nadie ha dicho la verdad completa, los dos culpables no están unidos por una arista.

Luego para identificar a los culpables hay que encontrar dos vértices del grafo que no estén unidos por una arista y que juntos ocupen un total de cuatro extremos, es decir, que la suma de las aristas que concurren en ellos sea 4. Un vistazo rápido al grafo es suficiente para ver que la única posibilidad la proporcionan los vértices A y C. De modo que han sido Alberto y Carlos los de las manzanas.

6. Encuentra todas las soluciones enteras del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^3+y^3+z^3=3. \end{cases}$$

Solución.

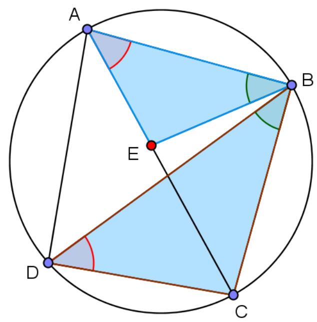
Si (x,y,z) es una solución del sistema, a partir de la identidad

$$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(y+z)(z+x)$$

resulta $8=(3-x)(3-y)(3-z)$. También se cumple que $(3-x)+(3-y)+(3-z)=6$. Repasando las posibles descomposiciones de 8 como producto de tres factores enteros vemos que las soluciones del sistema son $(1,1,1)$, $(-5,4,4)$, $(4,-5,4)$ y $4,4,-5)$.

7. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, con los vértices en ese orden a lo largo de la circunferencia. Prueba que $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$.

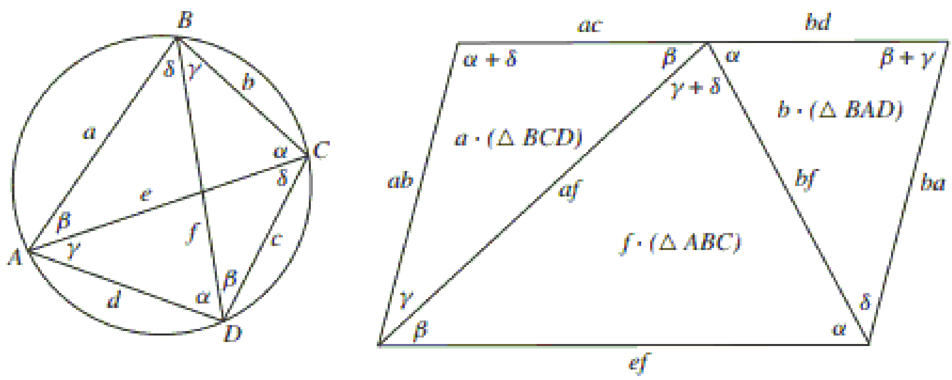
Solución 1. (Ptolomeo, ~ 140 d.C.)



Sea E el punto de la diagonal AC tal que $\angle ABE = \angle DBC$. Aplicando el teorema del ángulo inscrito en una circunferencia (figura) es inmediato ver que los triángulos ABE y DBC son semejantes porque tienen los mismos ángulos. Se sigue que $AE\cdot BD = AB\cdot CD$.

También son semejantes los triángulos ABD y EBC, siguiéndose $EC \cdot BD = BC \cdot AD$. Sumando las dos igualdades resulta la conclusión.

Solución 2. Sin palabras:

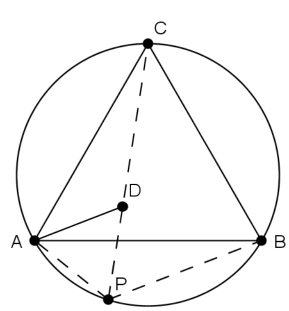


$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$ $\quad\therefore\ ef = ac + bd$

(W. Derrick, J. Herstein, Proof Without Words: Ptolemy's Theorem, The College Mathematics Journal, v. 43, n. 5, November 2012, p. 386.)

8. Un triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia. Sea P un punto cualquiera del arco pequeño AB. Prueba que $PC = PA + PB$.

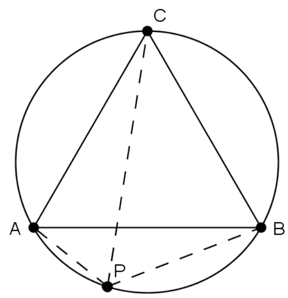
Solución 1.



Sea D el punto del segmento PC tal que $PD = PA$. Hay que probar que $DC = PB$.

$\angle APC = 60^\circ \implies$ el $\triangle APD$ es equilátero. Y entonces es fácil ver (por ejemplo, por un giro de 60° en torno al punto A) que los triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle APB$ son iguales, y DC y PB son lados correspondientes en la congruencia entre ambos.

Solución 2.



Aplicando el teorema de Ptolomeo: Si $AB = \ell$, se tiene $PC \cdot \ell = (PA + PB) \cdot \ell$.