Seminario de problemas. Curso 2015-16. Hoja 19

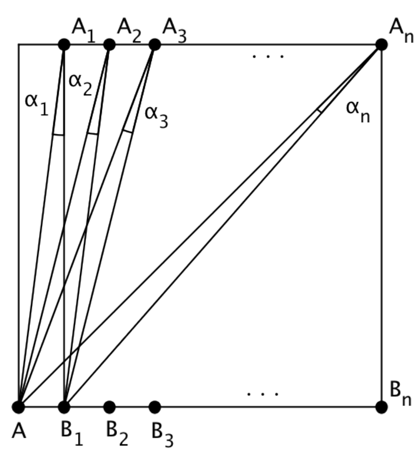
109. Probar que ningún número triangular escrito en base 7 termina en ninguna de las cifras $\{2, 4, 5\}$.

Solución. Módulo 7 tenemos

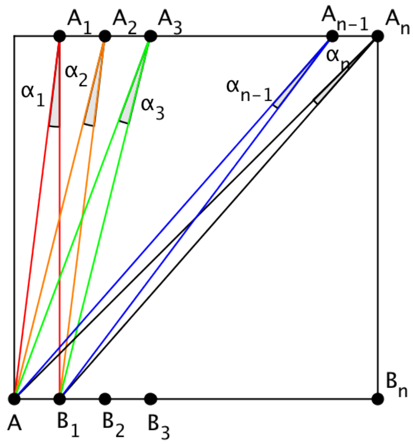
n	$\frac{n(n+1)}{2}$
0	0
1	1
2	3
3	6
4	3
5	1
6	0

110. Dado un cuadrado en el que la longitud del lado es 1 metro, dividimos dos lados paralelos en n segmentos iguales cada lado. Cada uno de los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, que son los extremos de la derecha de cada uno de los segmentos en uno de los lados, son a su vez vértices de un triángulo con base AB_1 (ver figura). Se pide:

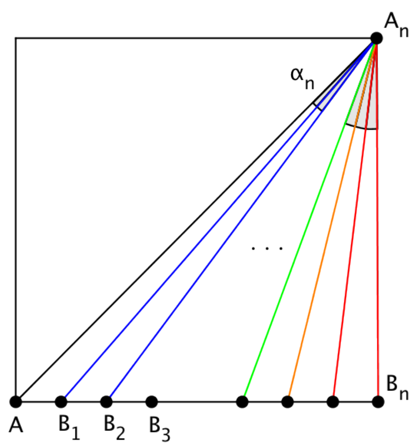
1. Hallar la suma de las áreas de los triángulos AA_1B_1, AA_2B_1, $\ldots$, AA_nB_1.
2. Hallar la suma de los ángulos $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, donde $\alpha_j = \angle AA_jB_1$ (ver figura).



Solución a ambos apartados. Con pocas palabras.



Trasladamos los triángulos AA_1B_1, AA_2B_1, $\ldots$, $AA_{n-1}B_1$ como indica el dibujo a continuación (notar la correspondencia de colores).



Por tanto, la suma de las áreas de los triángulos AA_1B_1, AA_2B_1, $\ldots$, AA_nB_1 es $\frac{1}{2}\ m^2$ y la suma de los ángulos $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ es $45°$.

111. N monedas están en una mesa, $N-1$ de ellas son oficiales o genuinas y tienen el mismo peso, y una es falsa, con un peso diferente. Usando una balanza de dos platos, el objetivo es determinar cuál es la moneda falsa y si es más ligera o pesada que las monedas oficiales. Siempre que se pueda deducir que una o varias monedas son oficiales, ellas serán inmediatamente descartadas y no se podrán utilizar en nuevas pesadas. Determinar los valores de N para los cuáles se puede lograr nuestro objetivo (no existen limitaciones sobre cuantas veces se puede utilizar la balanza).

Solución. Los valores de N para los cuáles se puede lograr el objetivo son $N = 2k$ con $k \geq 2$.

Si $N = 2$, entonces no se puede determinar cuál es la moneda falsa utilizando una balanza. Sea $N = 3$. En este caso tampoco podremos determinar si la moneda falsa pesa más o menos que las verdaderas. Al pesar dos monedas, si la balanza esta en equilibrio, entonces la que no se ha pesado es la moneda falsa, pero las dos monedas pesadas no se podrían utilizar en la siguiente pesada para determinar si la moneda falsa pesa más o menos.

Si $N = 4$ y pesamos dos monedas en cada plato de la balanza, entonces un plato subirá y otro bajará. Si la moneda falsa está en el grupo de las que suben, al comparar esas dos monedas en la balanza, si hay una que sube, esa será la falsa y pesa menos. Si la moneda está en el plato que baja, al pesar esas monedas, el plato que baja tiene la moneda falsa que pesa más.

Si $N = 6$, pesamos en dos grupos de 3 monedas cada uno. Llamemos A el grupo de monedas que suben y B el grupo de monedas que bajan. Del grupo B elegimos dos monedas (por supuesto, el mismo razonamiento vale si elegimos dos monedas del grupo A), y las pesamos. Si entre ellas está la moneda falsa, al pesarlas, el plato de dicha moneda bajará y tendremos resuelto el problema. En caso contrario, entre las cuatro monedas restantes estará la moneda falsa. Si el plato donde está la moneda del grupo B sube, la moneda que acompaña a la del grupo B es la falsa y pesa menos. En caso contrario, si este plato baja, entonces una de las tres monedas restantes será la falsa. Observar que dos son del grupo A y una es del grupo B. Pesamos entonces las dos monedas del grupo A, si un plato sube, en él estará la moneda falsa y pesará menos. Si los platos están en equilibrio, la moneda falsa será la que ha quedado sin pesar del grupo B, que pesa más.

Veamos ahora que si tenemos una cantidad par de monedas ≥ 4, entonces podemos determinar cuál es la falsa y si pesa más o menos que las oficiales. Si $N = 4k$, entonces separando las monedas en k grupos de 4 monedas cada uno y aplicando el método descrito anteriormente, podremos determinar la moneda falsa y si pesa más o menos que las monedas verdaderas.

Sea ahora $N = 4k + 2$, con $k \geq 1$. Dividimos las monedas en dos grupos con $2k + 1$ monedas cada uno. Lamemos grupo A al de las monedas que suben y grupo B al de las monedas que bajan. Pesamos de dos en dos a las monedas del grupo A. Si la moneda falsa está en este grupo, en una pesada donde ella intervenga, el plato subirá. Si al pesar se mantienen en equilibrio, eliminamos estas monedas hasta que lleguemos a tener una única moneda de ese grupo A. Entonces repetimos el proceso con las monedas grupo B hasta quedarnos, si es necesario, con tres monedas de ese grupo. Esta es una situación ya la estudiamos antes cuando analizábamos partiendo de un grupo de 6 monedas.

112. Demuestra que el número de ceros que tiene en total el número

$$A = 123456 \cdots 1\,000\,000\,000$$

que se obtiene al escribir uno tras otro, en el sistema de numeración decimal, todos los números naturales del 1 al 10^9, es igual al número de dígitos del número

$$B = 123456 \cdots 100\,000\,000$$

que se obtiene al escribir uno tras otro, en el sistema de numeración decimal, todos los números naturales del 1 al 10^8.

Solución.

El número B tiene

$$9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + \cdots + 8 \cdot 90\,000\,000 + 9$$

dígitos. Calculemos el número de ceros del número A. Para ello, escribamos cada uno de los números del 1 al 10^9-1 como un número de 9 dígitos, precediendo los números que tienen menos de 9 dígitos con el apropiado número de ceros (por ejemplo, escribamos 000 000 123 en lugar de 123), y reemplacemos el 1 000 000 000 final por 000 000 000.

Así obtenemos un número A^* de $9\cdot 10^9$ dígitos en el que cada dígitos aparece con la misma frecuencia, porque en realidad hemos dispuesto una tras otra todas las 10^9 variaciones con repetición de los 10 dígitos $\{0,1,2\ldots,9\}$ tomados 9 a 9. Entonces A^* tiene $9\cdot 10^8$ ceros.

Pero al pasar de A a A^* hemos incluido $8\cdot 9$ ceros añadidos a los números de 1 dígito, $7\cdot 90$ ceros añadidos a los números de 2 dígitos, y así sucesivamente. Restando el total de estos ceros añadidos del número de ceros de A^* obtenemos que el número de ceros de A es

$$9\cdot 10^8-8\cdot 9-7\cdot 90-\cdots-9\cdot 10^7,$$

y es fácil ver que este número es igual al número

$$2\cdot 9+2\cdot 90+3\cdot 900+\cdots+8\cdot 9\cdot 10^7$$

de dígitos de B.

113. Considerando la suma

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)},$$

expresar S_{2015} como una fracción irreducible.

Solución.

Observar en primer lugar que

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{(k+2)-k}{2k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right).$$

Este truco nos permite expresar la suma del enunciado como una serie telescópica en la que cada dos sumandos consecutivos cancelan un término:

$$2S_n=\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\left(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

Simplificando los términos que aparecen sumando y restando, llegamos a la expresión

$$S_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Si ahora tomamos $n=2015$, obtenemos que

$$S_{2015}=\frac{2015\cdot 2018}{4\cdot 2016\cdot 2017}=\frac{2015\cdot 1009}{2\cdot 2016\cdot 2017}.$$

Sin necesidad de factorizar completamente los números anteriores, observamos que los únicos factores primos comunes posibles de entre los números $2015, 2016, 2017$ y 2018 son 2 y 3 (son cuatro números consecutivos). Como 2016 es múltiplo de 6 y el numerador $2015\cdot 1009$ no es múltiplo de 2 ni de 3, deducimos que la fracción dada anteriormente es irreducible.