Seminario de problemas. Curso 2014-15. Hoja 19

126. *[Olimpiada Matemática Española, Fase Nacional, Ciudad Real 2004]* ¿Existe alguna potencia de 2 que al escribirla en el sistema decimal tenga todos sus dígitos distintos de cero y sea posible reordenar los mismos para formar con ellos otra potencia de 2? Justificar la respuesta.

Solución. Supongamos que tal número existe. Sean 2^m, 2^n $(m < n)$ las dos potencias obtenidas. Denotamos $k = n - m$. Se tiene que

$$2^n - 2^m = 2^m(2^{n-m} - 1) = 2^m(2^k - 1).$$

es múltiplo de 9. Por tanto $2^k - 1$ es múltiplo de 9.

Puesto que

$$2^n \leq 92^m.$$

Obtenemos

$$2^k \leq 9, \quad 2^k \in \{2, 4, 8\}, \quad 2^k - 1 \in \{1, 3, 7\}.$$

Pero ni 1 ni 3 ni 7 es múltiplo de 9.

No existe tal número.

127. *[Olimpiada Matemática Española, Fase Nacional, Santiago de Compostela 2005]* Sean a, b enteros. Demostrad que la ecuación

$$(x - a)(x - b)(x - 3) + 1 = 0.$$

admite a lo sumo una solución entera.

Solución. Si x es una raíz entera, entonces

$$(x - a)(x - b)(x - 3) = -1.$$

Por tanto $x - 3 \in \{\pm 1\}$.

Si hay dos raíces enteras x e y entonces $x - 3 = 1$, $y - 3 = -1$ (o viceversa). Ahora

$$(a - 4)(b - 4) = -1, \quad (a - 2)(b - 2) = 1.$$

De la segunda igualdad obtenemos que o bien $a = b = 3$ o bien $a = b = 1$. En ninguno de los dos casos se da la primera.

Esta contradicción prueba la proposición pedida.

128. *[Olimpiada Matemática Española, Islas Canarias 2003]* Ensartamos $2n$ bolas blancas y $2n$ bolas negras, formando una cadena abierta. Demuestra que, se haga en el orden que se haga, siempre es posible cortar un segmento de cadena exactamente con n bolas blancas y n bolas negras.

Solución. Hay $2n+1$ subcadenas de $2n$ bolas. Si colocamos las cadena entera de izquierda a derecha, podemos ordenar las subcadenas de izquierda a derecha.

Para cada una de ellas consideramos la diferencia entre bolas blancas y negras. Tomamos el vector de $2n + 1$ componentes formado por todas las diferencias. Le llamamos vector de estados.

La primera y la última subcadenas son disjuntas. Si llamamos d a la primera diferencia la última es, considerando x blancas y y negras inicialmente,

$$(2n - x) - (2n - y) = y - x = -(x - y) = -d.$$

En un estado cualquiera, si z es el número de bolas blancas la diferencia es

$$z - (2n - z) = 2z - 2n$$

que siempre es par.

De un estado al siguiente se pasa sumando 0, 2 o -2.

Por tanto recorremos todos los estados pares entre d y $-d$. Necesariamente pasamos por el estado 0. En él coinciden el número de bolas blancas y negras. O sea, hay n de cada.

129. *[Olimpiada Matemática Española 2010, Valladolid]* Sean $a, b, c, > 0$. Probad que para cualesquiera números positivos a, b, c se satisface la desigualdad

$$\frac{a + b + 3c}{3a + 3b + 2c} + \frac{3a + b + c}{2a + 3b + 3c} + \frac{a + 3b + c}{3a + 2b + 3c} \geq \frac{15}{8}$$

Solución. Posponemos la solución.

130. *[Olimpiada Matemática Internacional 1995, Toronto]* Los nuḿeros reales positivos $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ cumplen $x_0 = x_{1995}$, y

$$x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$$

para $i = 1, \ldots, 1995$. Hallad el máximo valor que puede alcanzar x_0.

Solución. Posponemos la solución.

131. *[Olimpiada Matemática de Española, 2005, Santiago de Compostela]* En un triángulo de lados a, b, c, el lado a es la media aritmética de b, c. Denotamos A, B, C los ángulos opuestos a cada lado. Probad que

- $0 \leq A \leq \pi/3$.
- La altura relativa al lado a es tres veces el inradio r.
- La distancia del circuncentro al lado a es $R - r$, con R el circunradio.

Solución

• Por el teorema del seno,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)} = \frac{b + c}{\operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\gamma)} = \frac{2a}{\operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\gamma)}.$$

Entonces

$$\frac{\operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\gamma)}{2} = \operatorname{sen}(\alpha).$$

Por la desigualdad de Jensen,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) \geq \operatorname{sen}(\alpha).$$

Entonces,

$$\cos(\alpha/2) \geq 2\operatorname{sen}(\alpha/2)\cos(\alpha/2).$$

O sea

$$\operatorname{sen}(\alpha/2) \leq \frac{1}{2}.$$

Eqivalentemente, $\alpha \leq \frac{\pi}{6}$.

• Denotamos p perímetro, A al área, h la altura en A. Tenemos que

$$\frac{pr}{2} = A = \frac{ah}{2}.$$

Entonces

$$3ar = ah.$$

Simplificando, $3r = h$.

• Sea I el incentro.

Sea O el circuncentro.

Sea P el punto en que la bisectriz en el vértice A corta a la circunferencia circunscrita. Notamos que I está en el segmento AP y que P es el punto medio del segmento circular BC.

Sea M el punto medio de BC. La mediatriz en M (perpendicular a BC por el punto medio pasa por O y por M.

Sea N el punto en que AP corta a BC.

Sea L el punto en que el incentro corta a BC.

Tenemos que los triángulos NPM, NIL son semejantes.

Nos piden probar que $OP - IL = OM$. Puesto que $OP = OM + MT$, es equivalente probar que $MP = IL$. Apelando a la semejanza de triángulos, es equivalente probar que $LN = NM$.

Nos fijamos en los triángulos NAB, NAC. Comparten el ángulo en A y los ángulos en N son suplementarios. Por el teorema del seno tenemos que

$$c = t \cdot BN, \quad b = t \cdot CN.$$

Por tanto

$$BN = \frac{c}{2}, \quad CN = \frac{b}{2}.$$

Entonces,

$$NM = \frac{b}{2} - \frac{b+c}{4} = \frac{b-c}{4}.$$

Denotamos $x = BL$, $y = LC$. Se tiene que

$$x - y = c - b, \quad x + y = \frac{b+c}{2}.$$

Luego

$$x = \frac{3c-b}{4}, \quad y = \frac{3b-c}{4}.$$

Finalmente,

$$LN = BN - x = \frac{c}{2} - \frac{3c-b}{4} = \frac{b-c}{4}.$$