Seminario de problemas. Curso 2015-16. Soluciones Hoja 18

103. Sean *a, b, c y d* cuatro números enteros. Demostrar que el producto de las seis diferencias $b-a$, $c-a$, $d-a$, $c-b$, $d-b$, $d-c$ es múltiplo de 12.

Solución

Veamos que dicho producto es divisible por 3 y por 4.

* Clasificamos los números *a,,b, c* y *d* según sus restos al ser divididos entre 3. Hay tres posibles restos (0, 1 y 2). Como son cuatro números, al menos dos de ellos pertenecerán la misma clase de restos, por lo que su diferencia, será múltiplo de 3. El producto propuesto es, por tanto, múltiplo de 3.

* Clasificamos los números *a, b, c* y *d* según sus restos al ser divididos entre 4. Hay cuatro posibles restos (0, 1 , 2 y 3).
  -Si dos de ellos caen en la misma clase, su diferencia será múltiplo de 4 y el producto propuesto será múltiplo de 4.
  -Si todos pertenecen a clases distintas, entre ellos habrá dos pares (su diferencia, por tanto, será par) y dos impares (su diferencia también será par). El producto será múltiplo de 4 al contener dos factores pares.

Por lo tanto $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$ será siempre múltiplo de 12

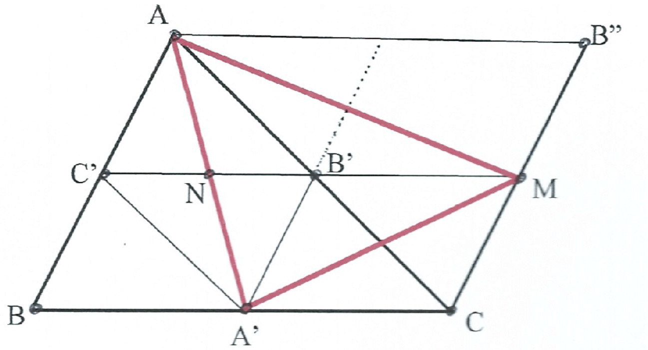
104. a) Dado un triángulo T_1, demostrar que sus tres medianas son lados de otro triángulo T_2 cuya área es 3/4 del área de T_1 .

b) Demostrar que el triángulo T_3, que tiene por lados las medianas de T_2, es semejante al triángulo inicial T_1 .

Solución

a) Sea ABC el triángulo T_1 y sean A', B' y C' los puntos medios de los lados BC, AC y AB respectivamente. Trazando paralelas por A a BC y por C a AB obtendremos un paralelogramo $BCB''A$.

$C'B'$ corta a $B''C$ en M y a AA' en N.. En la figura se observan diversos paralelogramos:



$BA'MB'$ es paralelogramo, por lo que $A'M = BB'$

$C'CMA$ es paralelogramo, por lo que $AM = CC'$

Por tanto el triángulo $AA'M$ es T_2 , pues sus lados son iguales a las medianas de T_1.

También es un paralelogramo $AC'A'B'$, por tanto N es el punto medio de AA' y $C'B'$.

Entonces $NB' = \frac{1}{2}B'C' = \frac{1}{2}B'M$ ya que $B'C' = B'M$

Al ser MN una mediana de $AA'M$, se sigue que B' es el baricentro de $AA'M$.

Para hablar de áreas recordemos tres ideas básicas:

i) Una mediana divide un triángulo en dos triángulos de igual área.

ii) Las tres medianas de un triángulo lo dividen en seis triángulos de igual área.

iii) Las paralelas medias de un triángulo lo dividen en cuatro triángulos iguales semejantes al triángulo inicial.

Si denotamos por [ABC] el área del triángulo ABC etc., tendremos:

$$\left[AA'M\right] = 6\left[ANB'\right] = 3\left[AC'B'\right] = \frac{3}{4}\left[ABC\right] \quad \text{c.q.d.}$$

b) Hemos visto *NM* es una mediana de $AA'M$ su longitud es $NM = \frac{3}{4}C'M = \frac{3}{4}BC$.

La misma relación se da con las otras dos medianas de T_2 (cada una es igual a 3/4 de un lado de T_1).

Sin necesidad de dibujar T_3 concluimos que T_3 es semejante a T_1 y la razón de semejanza entre ellos es 3/4.

105. Todos los coeficientes del polinomio $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + 1$ son positivos. Si las *n* raíces de $P(x) = 0$ son todas reales, demostrar que $P(2) \geq 3^n$.

Solución

Al ser todos los coeficientes positivos, valores de *x* que no sean negativos harán que *P*(*x*) sea positivo, en ningún caso 0. Por tanto, las raíces de $P(x) = 0$ han de ser todas negativas. Sean tales raíces $-r_1, -r_2, \cdots, -r_n$. Podemos poner:

$$P(x) = (x + r_1)(x + r_2)\cdots(x + r_n)$$

Al desarrollar el producto, el término independiente será 1 : $r_1 \cdot r_2 \cdots r_n = 1$

Por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica :

$$2 + r_i = 1 + 1 + r_i \geq 3\sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot r_i} = 3\sqrt[3]{r_i}$$

Por tanto,

$$P(2) = \left(2 + r_1\right)\left(2 + r_2\right)\cdots\left(2 + r_n\right) \geq 3\sqrt[3]{r_1} \cdot 3\sqrt[3]{r_2} \cdots 3\sqrt[3]{r_n} =$$
$$= 3^n \sqrt[3]{r_1 \cdot r_2 \cdots r_n} = 3^n \sqrt[3]{1} = 3^n \ c.q.d.$$

106. Probar que entre *n* y *3n* hay al menos un cubo perfecto para cada entero $n \geq 10$.

Solución:

Previamente demostraremos un lema que nos será útil.

Lema: *Si a y b son enteros positivos tales que* $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} > 1$, *entonces entre a y b existe al menos un cubo perfecto.*

Lo demostraremos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un entero *c* tal que $c^3 \leq b < a \leq (c+1)^3$. En tal caso se cumpliría que $c \leq \sqrt[3]{b} < \sqrt[3]{a} \leq c+1$ de donde se desprendería que $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \leq 1$ que contradice la hipótesis.

Es fácil de ver que la afirmación del enunciado se cumple para $n = 10, 11, 12, \cdots, 15$.

Para $n \geq 16$ utilizaremos el lema teniendo en cuenta que

$$(2,5)^3 = 15,625 \quad \text{y que} \quad 1,4 < \sqrt[3]{3} < 1,5$$

$$n > (2,5)^3 = \left(\frac{1}{1,4-1}\right)^3 > \frac{1}{\left(\sqrt[3]{3}-1\right)^3} \Rightarrow \sqrt[3]{n} > \frac{1}{\sqrt[3]{3}-1} \Rightarrow \sqrt[3]{3n} - \sqrt[3]{n} > 1$$

Por tanto, en virtud del lema demostrado, también se cumple para $n \geq 16$ y, en consecuencia, el enunciado se cumple para todo entero $n \geq 10$.

107. Dado el polinomio $P(x) = x^3 - 3x + 1$, hallar el polinomio de tercer grado cuyas raíces son las potencias quintas de las raíces de *P*(*x*).

Solución 1

Si *a* es una raíz de *P*(*x*) cumple que $a^3 - 3a = -1$, es decir $a(a^2 - 3) = -1$.

Elevando a la quinta potencia tenemos $a^5\left(a^2 - 3\right)^5 = -1$. Desarrollando el primer miembro:

$$a^5\left[a^{10} - 15a^8 + 90a^6 - 270a^4 + 405a^2 - 243\right] =$$
$$= a^5\left[a^{10} - 15a^2(a^6 - 6a^4 + 18a^2 - 27) - 243\right] =$$
$$= a^5\left[a^{10} - 15a^2(a^2 - 3)(a^4 - 3a^2 + 9) - 243\right]$$

Pero como $a(a^2 - 3) = -1$, el primer miembro queda:

$$a^5\left[a^{10} + 15a(a^4 - 3a^2 + 9) - 243\right] = a^5\left[a^{10} + 15a^5 - 45a^3 + 135a - 243\right] =$$
$$= a^5\left[a^{10} + 15a^5 - 45(a^3 - 3a) - 243\right] = a^5\left[a^{10} + 15a^5 + 45 - 243\right]$$

(el último paso al volver a aplicar $a^3 - 3a = -1$).

Si $z = a^5$, entonces *z* debe cumplir la ecuación $z\left[z^2 + 15z - 198\right] = -1$, por lo que el polinomio buscado será $Q(x) = x^3 + 15x^2 - 198x + 1$.

Solución 2

Sean *a, b* y *c* las raíces de *P*(*x*). Segun las fórmulas de Cardano-Vièta:

$$a + b + c = 0$$
$$ab + bc + ca = -3$$
$$abc = -1$$

Queremos encontrar los coeficientes de *Q*(*x*), dados por:

$$Q(x) = x^3 - (a^5 + b^5 + c^5)x^2 + (a^5b^5 + b^5c^5 + c^5a^5)x - a^5b^5c^5$$

Obviamente el último coeficiente es -1. Para los otros dos utilizaremos la suma de las potencias n-ésimas de las raíces de un polinomio (en nuestro caso $S_n = a^n + b^n + c^n$).

Ya conocemos los valores de $S_0 = 3$ *y* $S_1 = 0$. Fácilmente calculamos S_2 :

$$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 6$$

Sea *k* un entero no negativo. El polinomio $x^k \cdot P(x) = x^{k+3} - 3x^{k+1} + x^k$ cumple:

$$\left.\begin{aligned} a^{k+3} - 3a^{k+1} + a^k &= 0 \\ b^{k+3} - 3b^{k+1} + b^k &= 0 \\ c^{k+3} - 3c^{k+1} + c^k &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ Sumando término a término se obtiene: } S_{k+3} - 3S_{k+1} + S_k = 0$$

Podemos utilizar la recurrencia $S_{k+3} = 3S_{k+1} - S_k$ con $k = 0, 1, 2, 3...$ para obtener:

$S_3 = -3$; $S_4 = 18$; $S_5 = -15$ (ya tenemos el coeficiente de x^2).

Para acceder al coeficiente de *x* tendremos que remontarnos hasta S_{10} , ya que:

$$\left(a^5 + b^5 + c^5\right)^2 = a^{10} + b^{10} + c^{10} + 2\left(a^5b^5 + b^5c^5 + c^5a^5\right)$$

Seguimos, pues, con la recurrencia: $S_6 = 57$; $S_7 = -63$; $S_8 = 186$; $S_{10} = 621$

$$a^5b^5 + b^5c^5 + c^5a^5 = \frac{1}{2}\left(S_5{}^2 - S_{10}\right) = -198$$

Con lo que el polinomio buscado es $Q(x) = x^3 + 15x^2 - 198x + 1$

108. Siendo m_a , m_b , m_c las medianas de un triángulo ABC y r_a, r_b , r_c los exradios (radios de las circunferencias exinscritas al triángulo ABC), se pide:

a) Demostrar que se cumple la desigualdad $m_a \cdot m_b \cdot m_c \geq r_a \cdot r_b \cdot r_c$

b) Demostrar que ABC es equilátero si y solo si $\dfrac{1}{m_a^2} + \dfrac{1}{m_b^2} + \dfrac{1}{m_c^2} = \dfrac{1}{r_a^2} + \dfrac{1}{r_b^2} + \dfrac{1}{r_c^2}$

Solución:

a) Sabemos por el teorema de la mediana (sol. hoja 10) que $m_a = \sqrt{\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}}$

Si utilizamos la desigualdad $b^2+c^2 \geq 2bc$ en el numerador del radical, tendremos:

$$2b^2+2c^2-a^2 = b^2+c^2+b^2+c^2-a^2 \geq b^2+c^2+2bc-a^2 =$$
$$=(b+c)^2-a^2 = (b+c+a)(b+c-a) = 2p(2p-2a) = 4p(p-a)$$

donde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ es el semiperímetro del triángulo.

Por tanto, $m_a \geq \sqrt{p(p-a)}$ de forma análoga $m_b \geq \sqrt{p(p-b)}$; $m_c \geq \sqrt{p(p-c)}$ (I)

Luego $m_a \cdot m_b \cdot m_c \geq p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Por otro lado (ver apéndice), los exradios son:

$$r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} \; ; \; r_b = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}} \; ; \; r_c = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

con lo que $r_a \cdot r_b \cdot r_c = p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ y la desigualdad queda probada.

La igualdad se da en el caso $a=b=c$ (el triángulo ABC es equilátero)

b) Si el triángulo es equilátero la condición se cumple al darse la igualdad entre las tres medianas y los tres exradios.

Supongamos ahora que el triángulo no es equilátero poniendo, por ejemplo, $b \neq c$.
En tal caso, las desigualdades (I) quedan:

$m_a^2 > p(p-a)$; $m_b^2 \geq p(p-b)$; $m_c^2 \geq p(p-c)$ De donde se sigue que

$$\frac{1}{m_a^2}+\frac{1}{m_b^2}+\frac{1}{m_c^2} < \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right] = \frac{ab+bc+ca-p^2}{S^2}$$

donde *S* es el área del triángulo ABC. Por otro lado:

$$\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2} = \frac{1}{S^2}\left[(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2\right] = \frac{a^2+b^2+c^2-p^2}{S^2}$$

pero si $b \neq c$, entonces $ab+bc+ca < a^2+b^2+c^2$ con lo que se tendría que:

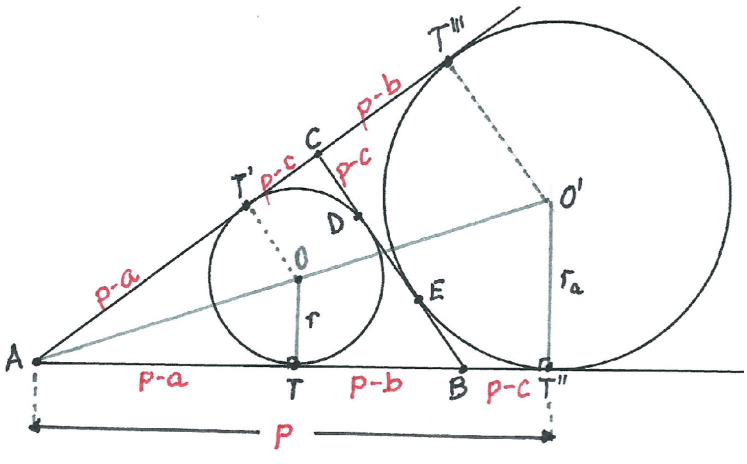
$$\frac{1}{m_a^2}+\frac{1}{m_b^2}+\frac{1}{m_c^2} < \frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}$$ y no se cumpliría la igualdad.

Luego la igualdad se cumple si y solo si el triángulo es equilátero. c.q.d.

APÉNDICE: Segmentos tangentes en las circunferencias inscrita y exinscritas

Demostraremos brevemente los resultados que aparecen en rojo en la figura.

Denotamos por p el semiperímetro del triángulo ABC. Es decir: $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.



La mayor parte de los razonamientos se basan en la igualdad de segmentos tangentes (desde un punto a una circunferencia y tangentes comunes a dos circunferencias).

Comencemos por la circunferencia inscrita:
Sabemos que $2p = a+b+c$. Haciendo AT=AT'=x , BT=BD=y , CD=CT'=z tenemos:

$$p = x + y + z \text{ pero } \begin{cases} z + y = a \Rightarrow x = p - a \\ x + z = b \Rightarrow y = p - c \\ x + y = c \Rightarrow z = p - b \end{cases}$$

Pasamos ahora a la circunferencia exinscrita tangente al lado *a*.
Ahora hacemos DE=w y BT"=t manteniendo CD=CT'=z

Por ser T'T'''=TT'' se tiene : T'C+CD+DE=DE+EB+BT''

$2z + w = 2t + w \Rightarrow z = t$ es decir BT"=BE=CD=CT'= $p - c$

Por lo tanto $AT'' = (p-a) + (p-b) + (p-c) = p$.

Como además $AT'' = AT'''$ debe ser $CT''' = CE = p - b$

RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA INSCRITA

De la fórmula de Herón y la expresión del área S de ABC en función de p y r :

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

EXRADIOS

Sean O y O’ los centros de las circunferencias inscrita y exinscrita tangente a *a*.
De la semejanza entre los triángulos rectángulos AOT y AO’T”

$$\frac{r_a}{p} = \frac{r}{p-a} \Rightarrow r_a = \frac{r \cdot p}{p-a} = \frac{S}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

Análogamente los otros dos:

$$r_b = \frac{S}{p-b} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}} \ ; \ r_c = \frac{S}{p-c} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

Notemos que entre los cuatro radios se da una curiosa relación: $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$ ya que

$$\frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p-(a+b+c)}{S} = \frac{3p-2p}{S} = \frac{p}{S}$$

Otra curiosidad:

ÁREA DE UN TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DEL INRADIO Y LOS EXRADIOS

De lo anteriormente expuesto se sigue con facilidad: $S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$

****