Seminario de problemas. Curso 2014-15. Hoja 18

119. Dados números reales a, b, c, d, e tales que

$$a + b + c + d + e = 8, \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16.$$

Hallar el mayor valor posible de e.

Solución. El mayor valor posible de e es $\frac{16}{5}$.

Probemos que los valores de e están en el intervalo $[0, \frac{16}{5}]$.

Utilizamos la desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática: si $a_1, a_2, \ldots, a_N$ son N números se cumple

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_N}{N} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_N^2}{N}}.$$

La igualdad se cumple en la desigualdad anterior si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_N \geq 0$.

De las igualdades dadas tenemos

$$(a + b + c + d)^2 = (8 - e)^2, \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16 - e^2.$$

Según la desigualdad entre la media aritmética de orden 1 y de orden 2,

$$(a + b + c + d)^2 \leq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2),$$

que se traduce en la relación

$$(8 - e)^2 \leq 4(16 - e^2) \Leftrightarrow e(5e - 16) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq e \leq \frac{16}{5}.$$

Observar que para $a = b = c = d = \frac{17}{10}$, $e = \frac{16}{5}$, se tiene las igualdades en las relaciones dadas en el problema.

El problema se puede generalizar. Dados los números reales $a_1, a_2, \ldots, a_N$ tales que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_N = l, \quad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_N^2 = m, \tag{1}$$

Hallar el mayor valor de a_N.

Observar que para que sea compatible el problema, según la desigualdad entre la medida aritmética y la media cuadrática, se tiene que satisfacer

$$l^2 \leq Nm. \tag{2}$$

Procediendo como en la solución del ejercicio planteado

$$(l - a_N)^2 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1})^2 \leq (N-1)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{N-1}^2) = (N-1)(m - a_N^2)$$

$$l^2 - (N-1)m - 2la_N + Na_N^2 \leq 0.$$

Si queremos que los valores sean positivos, imponemos la condición a l, m que $l^2 - (N - 1)m = 0$. Así, si $m = \frac{l^2}{N-1}$, entonces se cumple (2) y los valores posibles de a_N que cumplen (1) son

$$0 \leq a_N \leq \frac{2l}{N}.$$

120. Determinar todos los números reales t tales que cualesquiera sean los lados de un triángulo a, b, c, también

$$a^2 + bct, \quad b^2 + cat, \quad c^2 + abt$$

son lados de un triángulo.

Solución. Demostremos que los valores de t que son solución del problema son $\frac{2}{3} \leq t \leq 2$.

Para que tres números reales x, y, z sean las longitudes de los lados de un triángulo es necesario y suficiente que ellos sean positivos y que la suma de dos cualesquiera de ellos sea mayor que el tercero.

Podemos asumir, sin perdida de generalidad, que $0 < a \leq b \leq c$.

Como cada lado del triángulo tiene longitud positiva, $0 < a^2+bct$, $0 < b^2+cat$, $0 < c^2+abt$, que equivale a

$$t > \sup\{-\frac{a^2}{bc}, -\frac{b^2}{ca}, -\frac{c^2}{ab}\} = \sup\{-\frac{a^2}{bc}\},$$

donde el supremo se toma en a, b, c lados de un triángulo con $a \leq b \leq c$. Este supremo es cero debido a que $\frac{a^2}{bc}$ puede estar tan próximo a cero como se quiera; por ejemplo, si a pequeño y $b = c$. De modo que $t \geq 0$.

Para que la suma de dos de las magnitudes dadas sea mayor que la tercera, los valores de $t \geq 0$ posibles se caracterizan por las relaciones

$$a^2 + bct + b^2 + cat > c^2 + abt, \quad a^2 + bct + c^2 + abt > b^2 + cat,$$
$$b^2 + cat + c^2 + abt > a^2 + bct.$$

Como $c \geq b$ y $a > 0$, $a^2 + c^2 - b^2 > 0$ y debido a que $b \geq a$, $c < (c+a)$, $0 \geq t(ca - bc - ab)$, luego la desigualdad $a^2 + bct + c^2 + abt > b^2 + cat$ siempre es válida.

De $b^2 + cat + c^2 + abt > a^2 + bct$ tenemos

$$b^2 + c^2 - a^2 > t(bc - ca - ab) \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc - ca - ab} > t.$$

Observar que si $bc - ca - ab < 0$ la desigualdad anterior es válida, luego sólo interesa a, b, c y t tales que

$$b^2 + c^2 - a^2 > t(bc - ca - ab) \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc - ca - ab} > t.$$

Probemos ahora que el ínfimo de $\frac{b^2+c^2-a^2}{bc-ca-ab}$ es 2. En efecto,

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc - ca - ab} > 2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 > 2(bc - ca - ab)$$
$$\Leftrightarrow (b - c)^2 + a(b + c - a) > 0$$

y si $a = \epsilon$ muy pequeño y $b = c$, nos queda

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc - ca - ab} \approx 2.$$

Consideramos ahora la otra desigualdad $a^2+bct+b^2+cat > c^2+abt$. Observar que $ab-bc-ca<0$, luego

$$a^2+bct+b^2+cat > c^2+abt \Leftrightarrow a^2+b^2-c^2 > t(ab-bc-ca) \Leftrightarrow \frac{c^2-a^2-b^2}{bc+ca-ab} < t.$$

Aquí hemos utilizado que $ab-bc-ca<0$. Probemos que el máximo valor de $\frac{c^2-a^2-b^2}{bc+ca-ab}$ es $\frac{2}{3}$. En efecto,

$$\frac{c^2-a^2-b^2}{bc+ca-ab} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3(c^2-a^2-b^2) < 2(bc+ca-ab)$$
$$\Leftrightarrow 0 < (a-b)^2+2(a^2+b^2)-c^2+2c(a+b-c)$$

que es cierta porque $a+b>c \Rightarrow 2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 > c^2$. Además, si $a=b=c/2+\epsilon$, con ϵ positivo y muy pequeño, que son los lados de un triángulo, tenemos que

$$\frac{c^2-a^2-b^2}{bc+ca-ab} \approx \frac{\frac{c^2}{2}}{\frac{3c^2}{4}} = \frac{2}{3}.$$

121. Encontrar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que para todo x,y en $\mathbb{R}$ se cumple

$$f(f(x)^2+f(y)) = xf(x)+y.$$

Solución. Probemos que las únicas funciones que satisfacen la ecuación son $f_1(x)=x$, $f_2(x)=-x$. Es trivial comprobar que ellas cumplen la ecuación dada.

Si $x=0$, nos queda

$$f(f(0)^2+f(y)) = y.$$

Por tanto, f es inyectiva y sobreyectiva en $\mathbb{R}$.

Si $f(a)=0$ (tal valor existe porque f es sobreyectiva), haciendo $x=a$, tenemos

$$f(f(y)) = y,$$

de donde, por la inyectividad de f,

$$f(0)^2+f(y) = f(y) \Leftrightarrow f(0)=0.$$

Por otra parte, sustituyendo x por $f(x)$ en la ecuación dada y utilizando que $f(f(x))=x$, obtenemos

$$f(x^2+f(y)) = xf(x)+y$$

y por la inyectividad de f, concluimos

$$f(x)^2+f(y) = x^2+f(y) \Leftrightarrow f(x)=\pm x.$$

Pero no existen b y c tales que $f(b)=b$, $f(c)=-c$ y $bc\neq 0$, ya que en caso contrario, haciendo $x=b$, $y=c$, nos queda

$$f(b^2-c) = b^2+c.$$

Y si $f(b^2-c)=b^2-c$, entonces $c=0$, y si $f(b^2-c)=-b^2+c$, entonces $b=0$. Concluimos que las únicas soluciones son f_1, f_2.

122. En un campamento cada grupo de m estudiantes ($m \geq 3$) tiene exactamente un amigo común. Sabemos que si B es amigo de A, entonces A es también amigo de B. Al contar la cantidad de amigos de una persona no contamos a ella. Hallar la cantidad de amigos que tiene la persona con mayor cantidad de amigos.

Solución. En el problema se asume que m está fijo, $m \geq 3$, que en el campamento hay al menos $m+1$ personas, y se cumple "cada grupo de m estudiantes tiene exactamente un amigo común".

Probemos que en el campamento hay exactamente $m+1$ estudiantes y todos son amigos. Todos tienen m amigos.

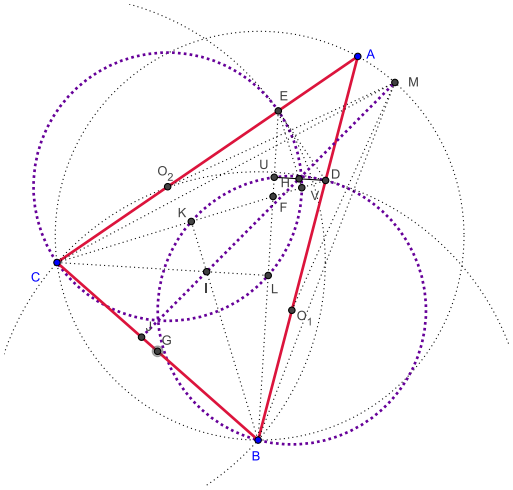
Cada estudiante tiene al menos un amigo en el campamento; más aún, cada grupo de k estudiantes, $2 \leq k \leq m$, tiene al menos un amigo común en el campamento porque considerando un grupo de k estudiantes, agregamos otros hasta completar m, y ellos tienen un amigo en común, que será amigo de los k estudiantes.

Podemos formar un grupo de $m+1$ estudiantes donde todos son amigos entre sí. En efecto, aplicamos lo demostrado anteriormente primero a un grupo de dos estudiantes A_1 y A_2 que son amigos, así se obtiene un estudiante A_3 de modo que A_1, A_2, A_3 son amigos. Repitiendo este razonamiento podemos llegar hasta un grupo $m+1$ amigos. Llamemos a este grupo de amigos $A_1, \ldots, A_{m+1}$. Veamos que estos son todos los estudiantes del campamento.

Para obtener una contradicción, supongamos que en el campamento hay otro estudiante B diferente a los $m+1$ que hemos descrito en el paso anterior. Si B tiene al menos dos amigos, por ejemplo, A_1, A_2, dentro de $A_1, \ldots, A_{m+1}$, se obtiene una contradicción porque el grupo formado por B y $A_3, \ldots, A_{m+1}$ tiene al menos dos amigos comunes. Por otra parte, si en el grupo $A_1, \ldots, A_{m+1}$ hay a lo sumo un amigo de B, podemos suponer que $A_2, \ldots, A_{m+1}$ no son amigos de B, y si C es un amigo de $B, A_1, A_3, \ldots, A_m$, entonces C no coincide con $A_1, \ldots, A_{m+1}$ y tiene al menos dos amigos en dicho grupo, que lleva a una contradicción según lo analizado anteriormente.

Observación. Si $m = 2$ la afirmación no tiene porqué ser cierta: existe una relación de amistad en un grupo de cinco personas donde cada grupo de dos personas tiene exactamente un amigo común y hay una persona que tiene 4 amigos. Por ejemplo, asumimos que A_1 es amigo de A_2, A_3, A_4, A_5, además, $\{A_2, A_3\}$ son amigos y $\{A_4, A_5\}$ también son amigos; de modo que cada grupo de dos estudiantes de estos cinco tiene exactamente un amigo. La idea de este ejemplo se puede generalizar a un grupo de $2n+1$ estudiantes, $n \geq 2$, con un estudiante amigo de los $2n$ restantes y en ese grupo de $2n$ estudiantes formamos grupos de dos estudiantes que los consideramos amigos, pero no amigos de los restantes $2n-2$.

123. Sean D y E los puntos de los lados AB y AC, respectivamente, de un triángulo ABC, tales que $BD = BC = CE$, y F el punto de intersección de las rectas CD y BE. Probar que el incentro I del triángulo ABC, el ortocentro del triángulo DEF y el punto medio del arco BAC de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC son colineales.



Solución. Primero hacemos varias consideraciones generales. Sean H el ortocentro del triángulo DEF y M el punto medio del arco BAC. La idea es probar que la recta que pasa por I y por H es el eje radical de las circunferencias Γ_1 y Γ_2 con diámetro BD y CE, respectivamente. Dicho eje radical también pasa por el punto medio del arco BAC porque las circunferencias Γ_1 y Γ_2 tienen iguales radios.

Lema. *En toda circunferencia, si dos cuerdas AB y CD se cortan en P, entonces*

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD = d^2 - R^2,$$

donde R es el radio de la circunferencia y d es la distancia del punto P al centro de dicha circunferencia. Cuando el punto P es exterior a la circunferencia, se tienen relaciones similares

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD = d^2 - R^2.$$

El producto anterior se llama potencia del punto P. Dadas dos circunferencias, los puntos que tienen igual potencia respecto a ambas es una recta llamada eje radical. Cuando las circunferencias se cortan, los puntos de intersección están en el eje radical.

Nos hace falta también una relación para el ortocentro de un triángulo.

Lema. *Si H es el ortocentro de un triángulo y U y V son los pies de las alturas trazadas desde los vértices A, B respectivamente, entonces $AH \cdot HU = BH \cdot HV$.*

Esto se obtiene de observar que los triángulos AUB y AVB están inscritos en la circunferencia de diámetro AB, además AU y BV son cuerdas en esa circunferencia que se cortan en H.

A continuación damos la solución del problema. Sea L la intersección de la recta CI con EB y sea K la intersección de la recta BI con CD. Como el triángulo ECB es isósceles y CI es la bisectriz del ángulo $\angle ECB$, se tiene que el ángulo $\angle CLB$ es recto. De forma similar observamos que $\angle BKF$ es recto.

Por el lema que acabamos de formular

$$BI \cdot IK = CI \cdot IL.$$

Si consideramos las circunferencias Γ_1 y Γ_2 de diámetros BD y CE, la primera pasa por K porque el ángulo $\angle BKD$ es recto y la segunda pasa por L por razones similares.

Como hemos probado que $BI \cdot IK = CI \cdot IL$, el punto I está en el eje radical de las circunferencias Γ_1 y Γ_2. Observar que como ambas circunferencias tienen el mismo radio, el eje radical son los puntos que equidistan de sus centros.

Con argumentos análogos obtenemos que H está en el eje radical de Γ_1 y Γ_2.

Veamos ahora que el punto medio M del arco BAC está también en el eje radical. Para ello comprobemos que M equidista de los centros de las dos circunferencias (esto es suficiente porque las dos circunferencia Γ_1 y Γ_2 tienen radios iguales). Veamos que los triángulos BMO_1 y CMO_2 son congruentes: se tiene que $BO_1 = CO_2$ porque las circunferencias Γ_1 y Γ_2 tiene iguales radios, $BM = CM$ porque M es el punto medio del arco BAC y los ángulos $\angle ABM$ y $\angle ACM$ son iguales porque son ángulos inscritos sobre el mismo arco de circunferencia. Por tanto, $MO_1 = MO_2$, que era lo que faltaba por probar.

124. Determinar todos los posibles valores enteros no negativos que puede tomar la expresión

$$\frac{m^2 + mn + n^2}{mn - 1},$$

siendo m y n enteros no negativos tales que $mn \neq 1$.

Solución. Sea $q = \frac{m^2+mn+n^2}{mn-1}$. Veremos que los valores enteros no negativos que puede tomar q son $0, 4, 7$.

Analizamos primero los casos $m = 0$, $m = 1$ y $m = n$. Si $m = 0$, entonces $n = 0$ y $q = 0$. Si $m = 1$,

$$q = \frac{n^2 + n + 1}{n - 1} = n + 2 + \frac{3}{n - 1}.$$

De donde $n - 1 = \pm 1$ ó $n - 1 = \pm 3$. En este caso los únicos valores enteros no negativos de n que conducen a un valor entero no negativo de q son $n = 2$ y $n = 4$, cuyo valor de q son 7.

Si $n = m$, entonces

$$q = \frac{3n^2}{n^2 - 1} = 3 + \frac{3}{n^2 - 1}.$$

Por tanto, $n^2 - 1 = \pm 1$, $n^2 - 1 = \pm 3$. En este caso los únicos valores de n que conducen a un valor entero no negativo de q son $n = 0$, $n = 2$, cuyos valores de q son $q = 0$, $q = 4$.

La idea fundamental de la solución es utilizar el método de descenso. Observaremos que si m, n son valores no negativos asociados a un valor de q ó el par (m, n) está asociado a q, es decir $q = \frac{m^2+mn+n^2}{mn-1}$, entonces *iremos descendiendo* en el valor de una de las componentes hasta encontrar un nuevo par de valores no negativos a, b que también están asociados a q y que cumplen que alguno de ellos es 0, 1 ó son iguales (los casos analizados anteriormente).

Observar que si $m = a$, $n = b$ son números enteros no negativos asociados a un valor no negativo de q, entonces $m = b$, $n = a$ están asociados al mismo valor q.

Consideremos el par (m, n) asociado a q un entero no negativo. Por la simetría anterior podemos asumir que $m \leq n$ y por el estudio ya realizado también podemos considerar $2 \leq m < n$. Veamos que también el par $(m(q - 1) - n, m)$ está asociado a q. En efecto,

$$q = \frac{m^2 + mn + n^2}{mn - 1} \Leftrightarrow n^2 + m(1 - q)n + m^2 + q = 0;$$

cuando consideramos m, q fijos, la ecuación anterior es una ecuación de segundo grado en n, que tiene como solución a n, y también $m(q-1)-n$.

Observemos que $m(q-1)-n$ es un entero no negativo (su producto por n es m^2+q), que cumple

$$m(q-1)-n \leq m$$

porque la relación anterior equivale a

$$m(\frac{m^2+mn+n^2}{mn-1}-1)-n \leq m \Leftrightarrow \frac{m(m(m-n)+2)+n}{mn-1} \leq 0$$

que es cierto porque $m(m-n)+2<0$ y $m \geq 2$ (con $m \geq 2$ y $n > m$, $m(m-n)+2$ sólo es igual a cero si $n=3$, $m=2$, que no da un valor entero para q).

Reiteramos que hemos probado que si (m,n) está asociado a q y $2 \leq m < n$, entonces $(m(q-1)-n, m)$ es un par de enteros no negativos que también está asociado a q. Este proceso siempre se puede repetir cuando se parte de un par con las características dadas. Como el proceso tiene que terminar en algún momento porque la segunda componente del par va disminuyendo, el valor de q tiene que estar asociada a uno de los casos analizados previamente.

125. Dado un entero positivo m denotemos por $d(m)$ la cantidad de sus divisores y por $\omega(m)$ la cantidad de sus divisores primos distintos. Probar que dado un entero positivo k cualquiera existen infinitos enteros positivos n que satisfacen las dos condiciones:

(i) $\omega(n) = k$.

(ii) Para todo a, b enteros positivos que satisfacen $a+b=n$ se tiene que $d(a+b)$ no divide a $d(a^2+b^2)$.

Solución. Recordar que si $p_1, \ldots, p_N$ son primos distintos, y $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ son enteros no negativos,

$$d(p_1^{\alpha_1} \cdots, p_N^{\alpha_N}) = (\alpha_1+1)\cdots(\alpha_N+1).$$

Mostraremos que cualquier número de la forma $n = 2^{p-1}m$, donde m es un número positivo que tiene exactamente $k-1$ factores primos distintos todos mayores que 3 y p es un número primo tal que $\left(\frac{5}{4}\right)^{(p-1)/2} > m$, satisface las condiciones del problema.

Es obvio que $\omega(2^{p-1}m) = k$.

Supongamos que existen a, b enteros positivos que satisfacen $a+b=n$ y que $d(n) = 2^{k-1}p$ divide a $d(a^2+b^2)$. Entonces p divide a $d(a^2+b^2)$. De modo que $a^2+b^2 = q^{cp-1}r$, donde q es un número primo, c es un entero positivo y r es primo con q. Si $q \geq 5$, entonces

$$2^{2p-2}m^2 = n^2 = (a+b)^2 > a^2+b^2 = q^{cp-1}r \geq q^{p-1} \geq 5^{p-1}$$

que contradice $\left(\frac{5}{4}\right)^{(p-1)/2} > m$.

Si $q=3$, entonces a^2+b^2 es divisible por 3, que ocurre sólo si a y b son múltiplos de 3, que es imposible por la factorización que tiene n.

Nos queda por analizar sólo el caso $a+b = 2^{p-1}m$ y $a^2+b^2 = 2^{cp-1}r$, donde todos los divisores de r son mayores o iguales que 5. Si las potencias de 2 que dividen a a y b son

diferentes, entonces la menor tiene que ser 2^{p-1}. De modo que 2^{2p-2} es la mayor potencia de dos que divide a $a^2+b^2=2^{cp-1}r$ ó equivalentemente $cp-1=2p-2$, que es imposible. Analicemos ahora cuando $a=2^t a_0$, $b=2^t b_0$ con a_0, b_0 impares y $t<p-1$. De la relación $a^2+b^2=2^{cp-1}r$, obtenemos que $a_0^2+b_0^2=2^{cp-1-2t}r$, como la parte izquierda es congruente con 2 módulo 4, entonces $cp-1-2t=1$, c es múltiplo de 2. Pero como $t<p-1$, da $(c/2)p=t+1<p$, que es imposible.