Seminario de problemas Bachillerato. Curso 2013-14. Hoja 18

119. Sean x_1, x_2 las raíces del polinomio $P(x) = 3x^2 + 3mx + m^2 - 1$, siendo m un número real. Probar que $P(x_1^3) = P(x_2^3)$.

Solución.

Tenemos $x_1 + x_2 = -m$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2-1}{3}$ y

$$\begin{aligned}
P(x_1^3) - P(x_2^3) &= 3x_1^6 + 3mx_1^3 + m^2 - 1 - (3x_2^6 + 3mx_2^3 + m^2 - 1) \\
&= 3(x_1^6 - x_2^6) + 3m(x_1^3 - x_2^3) \\
&= 3(x_1^3 + x_2^3)(x_1^3 - x_2^3) + 3m(x_1^3 - x_2^3) \\
&= 3(x_1^3 - x_2^3)(x_1^3 + x_2^3 + m).
\end{aligned}$$

Como

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = (-m)^3 - 3\frac{m^2 - 1}{3}(-m) = -m,$$

resulta que $x_1^3 + x_2^3 + m = 0$, lo que implica $P(x_1^3) - P(x_2^3) = 0$, por lo visto anteriormente.

120. Sean x, y números reales positivos y n un número natural. Probar que

$$(x + y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n).$$

Solución 1.

Lo probamos por inducción sobre n. En primer lugar, homogeneizamos la desigualdad. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $x < y$ (el caso en que $x = y$ es inmediato), y dividimos ambos miembros entre x. Llamando $y/x = s$, que es un número real mayor que 1, la desigualdad a probar es equivalente a probar

$$(1 + s)^n \leq 2^{n-1}(1 + s^n).$$

Para $n = 1$, la desigualdad se cumple (de hecho, es una igualdad). Supongamos que la desigualdad es cierta para un $n = k$, con k un número natural. Ahora, probamos la desigualdad para $n = k + 1$. Se tiene, usando la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}
(1 + s)(1 + s)^k \leq (1 + s)2^{k-1}(1 + s^k) &= 2^{k-1}(1 + s + s^k + s^{k+1}) \\
&= 2^{k-1}(1 + s^{k+1} + s + s^k) \\
&= 2^{k-1}(1 + s^{k+1}) + 2^{k-1}(s + s^k).
\end{aligned}$$

Ahora, veamos que $s + s^k \leq 1 + s^{k+1}$. Esta desigualdad es equivalente a

$$s - 1 \leq s^k(s - 1) \Leftrightarrow 1 \leq s^k$$

y esta última desigualdad es cierta, ya que $s > 1$. Ya hemos terminado.

Solución 2.

El problema es en realidad la desigualdad entre medias. En general, si p es un número real no nulo, definimos la **media generalizada** con exponente p de los números reales positivos $x_1, \ldots, x_d$ como

$$M_p(x_1, \ldots, x_d) = \left(\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} x_i^p\right)^{1/p}.$$

Para $p=1$, tenemos la media aritmética. La desigualdad entre medias generalizadas dice que si $p<q$, entonces $M_p(x_1,\ldots,x_d)\leq M_q(x_1,\ldots,x_d)$, y las dos medias son iguales si y sólo si $x_1=x_2=\ldots=x_d$.

En nuestro caso, la desigualdad se reescribe como

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\leq\frac{x^n+y^n}{2}\Leftrightarrow\frac{x+y}{2}\leq\left(\frac{x^n+y^n}{2}\right)^{1/n}\Leftrightarrow M_1(x,y)\leq M_n(x,y).$$

121. En un triángulo de lados a,b,c, el lado a es la media aritmética de b y c. Probar:

a) $0^{\circ}\leq A\leq 60^{\circ}$.

b) La altura relativa al lado a es tres veces el inradio r.

c) La distancia del circuncentro al lado a es $R-r$.

Solución.

Apartado a).

Solución 1.

Por el teorema del seno,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{2a}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}},$$

de aquí

$$\begin{aligned}\sin A=\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}&\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\sin\left(90^{\circ}-\frac{A}{2}\right)\cos\frac{B-C}{2}\\&\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\&\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B-C}{2}\leq 1,\end{aligned}$$

de donde se deduce que $\sin\frac{A}{2}\leq 1/2$, por lo que $0\leq A\leq 60^{\circ}$.

Solución 2.

Por la desigualdad triangular,

$$\begin{cases}b\leq\frac{b+c}{2}+c\Leftrightarrow b\leq 3c & \Leftrightarrow\frac{b}{c}\leq 3\\ c\leq\frac{b+c}{2}+b\Leftrightarrow c\leq 3b & \Leftrightarrow\frac{b}{c}\geq\frac{1}{3}\end{cases}$$

es decir,

$$\frac{1}{3}\leq\frac{b}{c}\leq 3.$$

Por el teorema del coseno,

$$\frac{(b+c)^2}{4}=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow\cos A=\frac{3b^2+3c^2-2abc}{8bc};$$

dividiendo numerador y denominador por c^2 y llamando $x=\frac{b}{c}$, queda:

$$\cos A=f(x)=\frac{3x^2-2x+3}{8x}=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}+\frac{3}{8x},$$

con $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$. Fácilmente se comprueba que $f\left(\frac{1}{3}\right) = f(3) = 1$ y que la derivada se anula en $x = 1$ donde hay un mínimo que vale $f(1) = \frac{1}{2}$.

También puede localizarse el mínimo sin recurrir a la derivada teniendo en cuenta la desigualdad de las medias:

$$f(x) = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} + \frac{3}{8x} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq -\frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot 2,$$

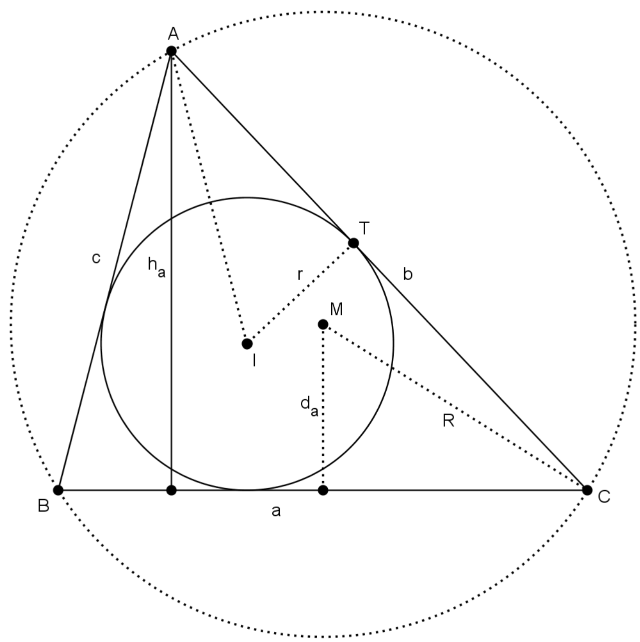
con igualdad para $x = 1$. Resumiendo, queda $\frac{1}{2} \leq \cos A \leq 1 \Leftrightarrow 60^{\text{o}} \geq A \geq 0^{\text{o}}$.

Apartado b). Designando A, B y C a los vértices opuestos a los lados a, b y c respectivamente, I al incentro y h_a a la altura correspondiente al lado a como se indica en la figura, S al área y p al semiperímetro, tenemos

$$\begin{cases} S = pr = \frac{a+b+c}{2}r = \frac{3ar}{2} \\ S = \frac{1}{2}ah_a, \end{cases}$$

de donde

$$\frac{3ar}{2} = \frac{1}{2}ah_a \Leftrightarrow 3r = h_a.$$



Apartado c). Sea d_a la distancia entre el circuncentro y el lado a. Por una parte,

$$d_a^2 = R^2 - \frac{a^2}{4},$$

y por otra

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} = \frac{2r}{a}.$$

Como $2R = \frac{a}{\sin A}$ y $\sin A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$, resulta:

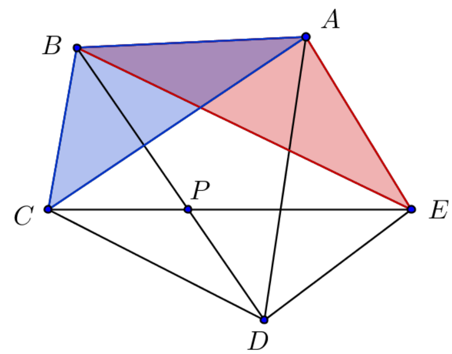
$$2R = a\frac{1 + \frac{4r^2}{a^2}}{\frac{4r}{a}} = \frac{a^2}{4r} + r \Rightarrow \frac{a^2}{4} = 2Rr - r^2,$$

que sustituyendo arriba, queda

$$d_a^2 = R^2 - \frac{a^2}{4} = R^2 - 2Rr + r^2 = (R-r)^2 \Leftrightarrow d_a = R - r.$$

122. Supón que los cinco triángulos "verticiales" ABC, BCD, CDE, DEA y EAB de un pentágono convexo $ABCDE$ tienen todos ellos área 1. Prueba que el área del pentágono es igual a $\sqrt{5}\cdot\phi$, donde $\phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ es el *número áureo*.

Solución 1.



Denotaremos por $[XY\ldots Z]$ el área del polígono $XY\ldots Z$.

La igualdad de las áreas de triángulos $[EAB] = [CAB]$ implica (considerar la figura) el paralelismo $EC \parallel AB$, y análogamente

$$AD \parallel BC, \quad BE \parallel CD, \quad AC \parallel DE, \quad BD \parallel AE.$$

Sea $[BPC] = x$, entonces $[DPC] = 1 - x$ y

$$\frac{[BPC]}{[DPC]} = \frac{BP}{DP} = \frac{[BPE]}{[DPE]},$$

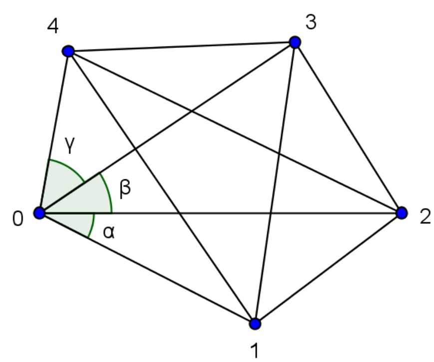
luego

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}, \quad \Longrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0, \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

luego

$$[ABCDE] = 3 + x = \frac{5+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}\cdot\phi.$$

Solución 2.



Vamos a denominar los vértices del pentágono 0, 1, 2, 3 y 4 como en la figura. Denotaremos en general por (ijk) el área del $\triangle ijk$, y abreviaremos por (i) el área $(i-1, i, i+1)$ del triángulo verticial $i-1, i, i+1$ (módulo 5).

Con los ángulos de la figura, podemos calcular las áreas

$$\begin{aligned}
2\cdot(012) &= |01|\cdot|02|\cdot\operatorname{sen}\alpha & \qquad 2\cdot(034) &= |03|\cdot|04|\cdot\operatorname{sen}\gamma\\
2\cdot(013) &= |01|\cdot|03|\cdot\operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \qquad 2\cdot(024) &= |02|\cdot|04|\cdot\operatorname{sen}(\beta+\gamma)\\
2\cdot(014) &= |01|\cdot|04|\cdot\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma) & \qquad 2\cdot(023) &= |02|\cdot|03|\cdot\operatorname{sen}\beta
\end{aligned}$$

De aquí resulta, como se comprueba fácilmente usando la fórmula de adición del seno, la siguiente relación (*fórmula de Monge*) válida para cualquier pentágono:

$$(012)\cdot(034)+(014)\cdot(023)=(013)\cdot(024).$$

Denotemos ahora por A el área (01234) del pentágono. Poniendo en la igualdad anterior $(012)=(1)$, $(034)=(4)$, $(014)=(0)$, $(023)=A-(1)-(4)$, $(013)=A-(2)-(4)$ y $(024)=A-(1)-(3)$, resulta la siguiente ecuación cuadrática en A (*fórmula de Gauss*) válida también para cualquier pentágono:

$$A^2-c_1A+c_2=0, \qquad \text{donde} \qquad \begin{cases} c_1=(0)+(1)+(2)+(3)+(4),\\ c_2=(0)(1)+(1)(2)+(2)(3)+(3)(4)+(4)(0). \end{cases}$$

En nuestro problema se supone que $(0)=(1)=(2)=(3)=(4)=1$, así que la ecuación de Gauss es

$$A^2-5A+5=0.$$

Esta ecuación tiene dos soluciones positivas, pero sólo una de ellas es mayor que 2, $A=\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})=\sqrt{5}\cdot\phi\approx 3.62$, que da el área del pentágono.

123. Las raíces de la ecuación $x^3-16x^2+81x-128=0$ son las longitudes de los lados de un triángulo. Encuentra el area del triángulo.

Solución.

Sean a, b y c las tres raíces de la ecuación. Se tiene

$$P(x)=x^3-16x^2+81x-128=(x-a)(x-b)(x-c).$$

En particular, $a+b+c=16$. Por otra parte, sea S el área del triángulo de lados a, b y c. Según la fórmula de Herón,

$$S^2=8\cdot(8-a)\cdot(8-b)\cdot(8-c)=8\cdot P(8)=8\cdot 8=64.$$

124. Tenemos 101 rectángulos con lados de longitud entera no mayor que 100. Prueba que entre ellos hay tres, digamos R, S y T, tales que R cabe dentro de S y S cabe dentro de T.

Solución.

Identifiquemos un rectángulo cualquiera por el par ordenado (x, y) de sus dimensiones, siendo siempre $x\le y$. Consideremos las cincuenta "cajas" $C_1, C_2, \ldots, C_{50}$ definidas como sigue:

La caja C_i consta de todos los rectángulos de los tipos

$$(i,i),\ (i,i+1),\ \ldots,\ (i,101-i)$$

y

$$(i+1, 101-i),\ (i+2, 101-i),\ \ldots,\ (101-i, 101-i).$$

El rectángulo $(x, y) \in C_i$ si y sólo si $\min\{x, 101-y\} = i$. Por el principio del palomar $(101 = 2 \times 50 + 1)$ tres de los rectángulos tienen que estar en la misma caja. Y para cada pareja de rectángulos de una misma caja, o son iguales o uno encaja dentro de otro.

125. Dado un entero positivo N consideramos el problema de encontrar números enteros positivos cuya suma sea N y cuyo producto tenga el máximo valor posible. Llamamos $P(N)$ a este producto máximo. Prueba que $P(5) = 2 \times 3$, $P(6) = 3^2$, $P(7) = 2^2 \times 3$, $P(8) = 2 \times 3^2$ y $P(9) = 3^3$. Encuentra $P(1000)$ explicando tu resultado.

Solución.

Si algún sumando es 1, como $1 \cdot k < k+1$, agrupando el 1 con otro sumando k se conseguiría mayor producto.

Si alguno de los sumandos es $k \geq 4$, como entonces es $k \leq 2 \cdot (k-2)$, sustituyendo ese sumando por los sumandos 2 y $k-2$ se conseguiría mayor producto.

Luego los sumandos "óptimos" para conseguir $P(N)$ son doses y treses.

Se trata entonces, dado un entero positivo N, de maximizar el producto $p(x, y) = 2^x \cdot 3^y$ donde x e y recorren las soluciones enteras no negativas de $2x + 3y = N$.

Es equivalente maximizar el logaritmo (en base 3, por ejemplo) de $p(x, y)$:

$$\begin{aligned}
\log_3(p(x, y)) &= x \log_3(2) + y \\
&= x \log_3(2) + \frac{N - 2x}{3} \\
&= \frac{N}{3} + x\Big(\log_3(2) - \frac{2}{3}\Big) \\
&= \frac{N}{3} + \frac{x}{3} \log_3(8/9).
\end{aligned}$$

Como $\log_3(8/9) < 0$, habrá que minimizar x, es decir, el número de doses en la suma. De modo que, según el resto de N módulo 3,

N	$P(N)$
$3k$	3^k
$3k+1$	$2^2 \cdot 3^{k-1}$
$3k+2$	$2 \cdot 3^k$

y en particular $P(1000) = 2^2 \cdot 3^{332}$.