Seminario de problemas. Curso 2015-15. Hoja 17

113. *[Olimpiada Matemática de Española, 2003, Islas Canarias]* Las alturas de un triángulo ABC se cortan en un punto H. Sabemos que $AB = CH$. Determinad el valor del ángulo BCA.

Solución.

Consideramos el punto de corte de AH con CB, que llamamos R.

Comparamos los triángulos ARB, CRH. Ambos son rectángulos en R. Los ángulos en A y en C son, ambos, complementarios del ángulo en B del triángulo original. Luego son iguales. Por tanto, los triángulos ARB, CRH son semejantes.

Como $AB = CH$, los triángulos ARB, CRH son congruentes. Luego $AR = CR$.

El triángulo ARC es rectángulo isósceles en R. Su ángulo en C es $\pi/4$. Ese ángulo es el ángulo en C de ABC. Por tanto, este útltimo vale $\pi/4$.

114. *[Olimpiada Matemática de Estados Unidos, 1991]* Dados $2n$ números distintos $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$, llenamos una tabla de n filas y n columnas de la siguiente forma: en la celda que ocupa la i-ésima fila y j-ésima columna colocamos el número $a_i + b_j$. Supongamos que el producto de todas las filas es el mismo. Probad que el producto de todas las columnas es el mismo.

Solución.

Llamamos P al producto de todas las filas. Consideramos el polinomio

$$P(x) = \prod_{j=1}^{n} (x + b_j) - P.$$

Puesto que $a_1, \ldots, a_n$ son las raíces de P y el polinimio tiene coeficiente director 1, se tiene que

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i).$$

Evaluando en $-b_j$, obtenemos que

$$-P = (-1)^n \prod_{j} (a_i + b_j).$$

O sea, el producto e las columnas es $(-1)^{n+1} P$.

115. *[Olimpiada Matemática Austriaca 2008]* Sean a, b, c números positivos tales que $a+b+c = 1$. Probad que

$$\sqrt{a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}} \le \frac{1}{3}.$$

Solución.

Notamos que

$$\frac{1-a}{2} + \frac{1-b}{2} + \frac{1-c}{2} = 1, \frac{1-a}{2}, \frac{1-b}{2}, \frac{1-c}{2} \ge 0.$$

Aplicando la desigualdad entre medias geométricas y aritméticas, ponderadas,

$$\begin{aligned}\sqrt{a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}} &= a^{(1-a)/2} + b^{(1-b)/2} + c^{(1-c)/2} \\ &\le \frac{1-a}{2}a + \frac{1-b}{2}b + \frac{1-c}{2}c \\ &= \frac{a+b+c-a^2-b^2-c^2}{2} \\ &= \frac{1-a^2-b^2-c^2}{2}.\end{aligned}$$

Por tanto, es suficiente probar que

$$\frac{1-a^2-b^2-c^2}{2} \le \frac{1}{3}.$$

Esta desigualdad equivale a

$$\frac{1}{3} \le a^2+b^2+c^2,$$

que a su vez equivale a

$$\frac{1}{3} \le \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{1/2}.$$

Aplicando la desigualdad entre medias cuadrática y aritmética,

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{1/2} \ge \frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3}.$$

116. *[Olimpiada Matemática Española, La Rioja 2002]* En un polígono regular H de $6n + 1$ lados (n entero positivo), r vértices se pintan de rojo y el resto de azul. Demostrar que el número de triángulos isósceles que tienen sus tres vértices del mismo color no depende del modo de distribuir los colores en los vértices de H.

Solución

Llamamos segmentos a los lados y diagonales del polígono.

Llamamos r al número de vértices rojos, y a al número de vértices azules.

Clasificamos los segmentos según los posibles colores de sus vértices, y denotamos S_{rr}, S_{aa}, S_{ar} a cada tipo de segmento. Llamamos s_{rr}, s_{aa}, s_{ar} al número de cada tipo de segmento.

Se tiene que

$$s_{rr} = \frac{r(r-1)}{2}.$$
$$s_{aa} = \frac{a(a-1)}{2}.$$
$$s_{ar} = ar.$$

En particular, estos números no dependen de la distribución de los vértices.

Clasificamos los triángulos isósceles del polígono según los posibles colores de sus vértices, y denotamos T_{rrr}, T_{aaa}, T_{rra}, T_{raa} a cada tipo de triángulo. Llamamos t_{rrr}, t_{aaa}, t_{rra}, t_{raa} al número de triángulos en cada tipo.

Como $6n + 1$ es impar y no es múltiplo de 3 cada segmento pertenece exactamente a tres triángulos isósceles.

Cada segmento de tipo S_{rr} está en 3 triángulos isósceles, que o bien son de tipo T_{rrr} o bien de tipo T_{rra}. Si cuento los segmentos de tipo S_{rr} que hay en estos dos tipos de triángulos obtengo 3 veces el número de segmentos en S_{rr}. Además, los triángulos en T_{rrr} tienen tres segmentos de ese tipo, y los triángulos en T_{rra} sólo tienen uno. Luego

$$3t_{rrr} + t_{rra} = 3s_{rr}.$$

Del mismo modo,

$$3t_{aaa} + t_{raa} = 3s_{aa}.$$

Con un razonamiento similar, como en cada triángulo de tipo T_{rra} o de tipo T_{raa} hay dos lados de tipo S_{ra},

$$2t_{rra} + 2t_{raa} = 3s_{ar}.$$

Realizando una combinación lineal adecuada de las tres identidades obtenemos

$$6t_{rrr} + 6t_{aaa} = 6(s_{rr} + 6s_{aa} - 6s_{ar}).$$

Por tanto $t_{rrr} + t_{aaa}$ no depende de la distribución de los vértices.

117. *[Olimpiada Matemática Argentina, 2008]* Consideramos un tablero de dimensiones $a \times b$, con a, b enteros mayores o iguales que 2. Llamamos casillas a cada uno de los $a \times b$ cuadrados que forman el tablero. Llamamos lados a las aristas de las casillas. Inicialmente, el tablero está coloreado en blanco y negro de forma arlequinada, como un tablero de ajedrez, de modo que en una esquina (por ejemplo, la de abajo a la derecha) hay una casilla blanca. Cambiamos, cuantas veces deseemos, de color las casillas del tablero según la siguiente regla:

> *Usamos los colores blanco, negro y verde. Cambiamos de color dos casillas que tienen un lado común. El color blanco pasa a ser negro, el negro a verde, y el verde a blanco.*

Hallad para que valores de a y de b es posible lograr que las casillas inicialmente blancas pasen a negras y, las negras pasen a blancas.

Solución.

Dividimos las casillas en dos tipos, según su color inicial.

Identificamos el color blanco con el 0. Identificamos el color negro con el 1. Identificamos el color verde con el 2.

En cada estado del proceso consideramos la suma de los números que hay en las casillas de cada uno de los tipos. Hacemos la diferencia entre las dos cantidades y la denotamos D. (D es una cantidad que varía según hacemos cambios permitidos).

Puesto que, en cada paso sumamos 1 (o restamos 2) a una casilla de cada tipo, el resto al dividir por 3 de esa cantidad D no varía. (La congruencia módulo 3 de D no varía hagamos los cambios permitidos que hagamos).

Llamamos B al número de fichas de un tipo, N al de otro tipo. En la posición inicial la diferencia D vale $-N$. En la hipotética posición final vale B. Para estos números tengan el mismo resto tiene que ser $B - (-N)$ mútliplo de 3.

Pero $B + N = ab$. O sea, o bien a o bien b múltiplo de 3.

Por otra parte, si logramos hacer el proceso en un tablero 1×3, es posible hacerlo en un tablero $a \times b$ con uno de los lados múltiplo de 3: basta dividir el tablero en tableros 1×3 y actuar en cada uno de ellos.

Finalmente, describimos el proceso para invertir colores en un tablero 1×3:

$$(B, N, B) \to (N, V, B) \to (N, B, N).$$

118. *[Matemática Española, Fase Local, 1994]* Sean n, k enteros positivos, $k < n$. Planteamos el siguiente juego de azar: En un saco tenemos $2n$ bolas, n blancas, y n negras. Sacamos las bolas de una en una. Si en algún momento hay fuera de la bolsa k bolas blancas más que bolas negras, perdemos. En otro caso ganamos. Calculad la probabilidad que tenemos de ganar el juego.

Solución.

Definimos camino es una secuencia

$$(a_0, b_0), (a_1, b_1,), \ldots, (a_N, b_N)$$

donde en cada paso aumentamos una unidad en el eje de abcisas y sumamos o restamos una unidad en el eje de ordenadas.

Identificamos los casos posibles con caminos que parten $(0, 0)$ y llegan a $(2n, 0)$.

Los casos desfavorables son biyectivos con caminos que parten de $(0, 0)$ y llegan a $(2n, 2k)$.

En general, los caminos que parten de $(0, 0)$ y llegan a $(2n, 2j)$ son biyectivos con todas las formas posibles de extraer $2n$ bolas, $n + j$ de ellas blancas, $n - j$ negras. Su cantidad es el número combinatorio

$$\binom{2n}{n+j} = \binom{2n}{n-j} = \frac{(2n)!}{(n+j)!(n-j)!} = \frac{2n(2n-1)\ldots(2n-j+1)}{(n-j)!}.$$

Nosotros estamos interesados en los casos $j = 0$, $j = k$. La probabilidad de ganar es, concretamente,

$$1 - \frac{\binom{2n}{n+k}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n!n!}{(n+k)!(n-k)!} = 1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)}.$$