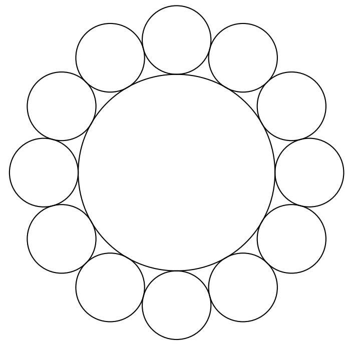
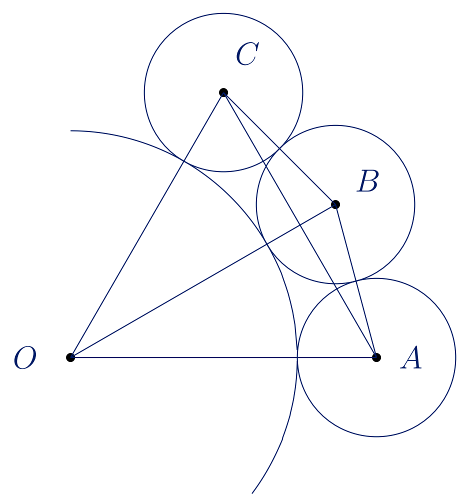
Seminario de problemas. Curso 2014-15. Hoja 15 con soluciones

99. Si en un reloj con el diseño del dibujo el radio de la circunferencia del centro es 1, ¿cuál es el radio de las doce circunferencias pequeñas?





Mari Luz resolvió el problema usando el teorema del seno, aplicado al triángulo isósceles AOB: llamemos r al valor buscado, notando que entonces $|AB| = 2r$ y $|OA| = 1 + r$. Como el ángulo en O mide 30° obtenemos que el ángulo en B y el ángulo en A miden cada uno 75° (ya que los tres deben sumar 180°). Tenemos entonces que

$$\frac{2r}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{1+r}{\operatorname{sen} 75^\circ} = \frac{1+r}{\operatorname{sen}(45^\circ + 30^\circ)} = \frac{1+r}{\operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ}\,.$$

Sabemos que $\operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos 45^\circ = \operatorname{sen} 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, y entonces

$$4r = \frac{1+r}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{4(1+r)}{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)} = \frac{4(1+r)}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\,,$$

de donde $r\,(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = 1 + r$, y finalmente

$$r = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-1} \quad (\simeq 0,3492)\,.$$

Isabel llegó a la solución sin evaluar senos ni cosenos, basta usar el teorema de Pitágoras. Hay que notar que AC y OB son perpendiculares, y también que AOC es equilátero, con lo que $|AC| = 1 + r$. No entraremos en más detalles, pero parece oportuna la siguiente advertencia: cometeríamos un error si pensáramos que la distancia entre B y la intersección de AC con OB es $r/2$.

100. En un concurso de televisión se nos presentan tres puertas cerradas. Detrás de una de ellas hay un coche, tras las otras dos no hay nada. Debemos elegir una a ciegas, y nos llevaremos el coche si acertamos la puerta buena. Pero en todos los casos, antes de descubrir qué hay tras la que hemos elegido, el presentador abre una de las otras dos donde no hay nada, y nos da la opción de cambiar nuestra elección inicial.

¿Cuál es la probabilidad de acertar si no cambiamos nuestra elección, y cuál si cambiamos?

¿Y si hubiera 1000 puertas y el presentador abriera 998?

Este problema lo resolvió Ernesto. Tratemos primero la cuestión con tres puertas. Veremos que la probabilidad de ganar si no cambiamos es $1/3$, y si cambiamos es $2/3$:

La probabilidad de acertar la puerta buena en nuestra elección inicial es $1/3$.

Si ya no la vamos a cambiar, esa es obviamente la probabilidad de llevarnos el coche.

Tras nuestra elección inicial el presentador abre una puerta donde no está, y quedan dos puertas como posibles ganadoras: la que hemos elegido nosotros y otra; que lo sea la nuestra tiene como hemos dicho probabilidad $1/3$, y que lo sea la otra tiene forzosamente probabilidad $1 - 1/3$, o sea $2/3$.

Dicho de otra forma, todos los casos a enumerar si queremos detallar las posibles elecciones por nuestra parte y por el presentador se resumen en que si nuestra elección inicial no es buena entonces lo es la que nos queda como segunda opción.

El caso de las mil puertas es análogo: tenemos una probabilidad de $1/1000$ de acertar a la primera, y esa es la que tenemos de ganar si no cambiamos. Y ganamos tras cambiar si y solo si fallamos a la primera, porque el presentador nos abrirá todas las puertas menos la que oculta el coche, así que si cambiamos nuestra probabilidad de ganar es $999/1000$.

Hay mucha información disponible online sobre la historia de este problema y sus variantes y otros problemas relacionados. Sugerimos seguir el siguiente enlace:

http://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem.

101. Tenemos siete números $a, b, c, d, e, f, g \geq 0$ que suman 1. Si M es el número mayor entre las sumas $a+b+c$, $b+c+d$, $c+d+e$, $d+e+f$ y $e+f+g$, ¿cuál es el mínimo valor que puede tomar M?

Si de los cinco valores nos quedamos con los tres dados por $a+b+c$, $d+e+f$ y $e+f+g$, su suma es $a+b+c+d+e+f+g+e+f = 1+e+f \geq 1$. Necesariamente alguno de los tres debe ser entonces mayor o igual a $1/3$ (porque si sumamos tres números menores que $1/3$ el resultado será menor que 1). M es el máximo entre ellos tres y los dados por $b+c+d$ y $c+d+e$. Podemos afirmar por tanto que para cualquier elección de (a, b, c, d, e, f, g) con las condiciones dadas debe ser $M \geq 1/3$.

Y, de hecho, M puede ser exactamente $1/3$, como sucede si elegimos

$$(a, b, c, d, e, f, g) = (1/3, 0, 0, 1/3, 0, 0, 1/3)$$

(las cinco sumas en este caso valen $1/3$). La solución al problema, en definitiva, es $1/3$.

102. La fracción $\dfrac{p}{q}$ es igual a

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}.$$

Probar que entonces p es múltiplo de 3023.

Una disculpa previa: la elección de las letras p y q es algo desafortunada porque se suelen reservar para denotar números primos, pero en este problema no esperamos que lo sean.

Reescribimos la *suma alternada* del enunciado como

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2014}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2015} - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{1007}\right) \\
&= \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \cdots + \frac{1}{1511} + \frac{1}{1512} + \cdots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} \\
&= \left(\frac{1}{1008} + \frac{1}{2015}\right) + \left(\frac{1}{1009} + \frac{1}{2014}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{1511} + \frac{1}{1512}\right) \\
&= \frac{3023}{1008 \times 2015} + \frac{3023}{1009 \times 2014} + \cdots + \frac{3023}{1511 \times 1512} \\
&= 3023\left(\frac{1}{1008 \times 2015} + \frac{1}{1009 \times 2014} + \cdots + \frac{1}{1511 \times 1512}\right) \\
&= 3023 \times \frac{r}{s}\,,
\end{aligned}$$

donde s es el producto $1008 \times 1009 \times \cdots \times 2014 \times 2015$.

Tenemos entonces que $p\,s = 3023\,r\,q$, así que 3023 divide al producto de p y s. Ahora bien, 3023 es un número primo (este hecho no lo probamos, asumiremos que quien resuelve el problema advierte que es crucial y es capaz de comprobarlo por su cuenta). Dado que no divide a s (porque s es el producto de una colección de números menores que él) concluimos que sí divide a p.

103. Probar que la suma de todas las fracciones $\dfrac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k}$, donde $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ recorre los subconjuntos no vacíos de $\{1, 2, \ldots, n\}$, es igual a n

(por ejemplo
$$3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}).$$

Se sobreentiende que, en la expresión dada de los subconjuntos, todos los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son distintos entre sí.

Isabel demostró la proposición por inducción: para hacerlo con rigor hay que empezar comprobando que es cierta si $n = 1$, y lo es porque el único subconjunto no vacío de $\{1\}$ es el mismo conjunto, con lo que la suma se reduce a la fracción $1/1$, igual a 1. La prueba que daremos (para terminar) de que si es cierta para n entonces lo es para $n+1$ es válida también si $n = 1$, y entonces no es necesario hacer más comprobaciones (aunque como ejemplo ilustrativo se comprueba en el enunciado para $n = 3$).

Supongamos entonces que la suma S_n de las fracciones referidas para n es igual a n. Nos conviene expresar este hecho de manera que nos permita hacer aparecer S_n en la expresión acorde de S_{n+1}. Para ello, denotamos por $\mathcal{F}$ la familia de subconjuntos no vacíos de $\{1, 2, \ldots, n\}$, y llamamos π_A al producto de los elementos de cada $A \in \mathcal{F}$, de forma que escribimos
$$S_n = \sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{1}{\pi_A} = n.$$

Agrupamos entonces los subconjuntos no vacíos de $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ en tres partes: por un lado, la familia $\mathcal{F}$ anterior (es decir, los subconjuntos que no incluyen el elemento $n+1$); por otro, para cada $A \in \mathcal{F}$ tenemos el subconjunto $A \cup \{n+1\}$; y nos queda por último el subconjunto $\{n+1\}$. Vemos así que
$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{1}{\pi_A} + \sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{1}{(n+1)\pi_A} + \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{1}{\pi_A} + \frac{1}{n+1} \sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{1}{\pi_A} + \frac{1}{n+1} \\
&= n + \frac{1}{n+1}\cdot n + \frac{1}{n+1} = n + \frac{1}{n+1}\,(n+1) \\
&= n + 1\,.
\end{aligned}$$

Como solución alternativa, la proposición se demuestra directamente para cada n como sigue: sea

$$P_n = \Big(1+\frac{1}{1}\Big)\Big(1+\frac{1}{2}\Big)\Big(1+\frac{1}{3}\Big)\cdots\Big(1+\frac{1}{n-1}\Big)\Big(1+\frac{1}{n}\Big).$$

Por la propiedad distributiva, P_n es la suma de todos los productos de n números que obtenemos al elegir en cada paréntesis uno de los dos sumandos. Si en cada paréntesis elegimos el primer sumando 1, el producto es 1. El resto de elecciones se corresponden con cada uno de los subconjuntos $A \in \mathcal{F}$ (en los paréntesis correspondientes a los elementos k de A elegimos el segundo sumando $1/k$ y en los demás elegimos el sumando 1), y para cada elección, o sea para cada subconjunto A, el producto es obviamente $1/\pi_A$. Por tanto

$$P_n = 1 + \sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{1}{\pi_A} = 1 + S_n\,.$$

Ahora bien, podemos calcular directamente P_n operando en cada paréntesis:

$$P_n = 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\cdot}{4}\cdot\dots\cdot\frac{n-1}{\cdot}\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n} \;=\; n+1\,,$$

de manera que $1+S_n = n+1$ y en efecto $S_n = n$.

104. Consideramos los subconjuntos de n elementos de $I_{2n} = \{1,2,3,4,\dots,2n-1,2n\}$. Un tal subconjunto A es *bueno* si, para cada k desde 1 hasta n, en $I_{2k} = \{1,2,\dots,2k-1,2k\}$ hay al menos k elementos de A; en caso contrario es *malo*.

Probar que I_{2n} tiene tantos subconjuntos malos de n elementos como subconjuntos de $n-2$ elementos.

Ayuda: todo subconjunto malo tiene un primer número k por el que deja de ser bueno; todo subconjunto de $n-2$ elementos es malo.

Probaremos que dichos dos conjuntos (el de subconjuntos malos de n elementos y el de subconjuntos de $n-2$ elementos, dentro de todos los subconjuntos de I_{2n}) tienen el mismo número de miembros estableciendo una correspondencia uno a uno (es decir una *biyección*) entre los miembros de un conjunto y los del otro. Es más, la correspondencia se establece, para cada $k = 1,2,\dots,n-1$, entre los miembros de cada conjunto para los que la propiedad de ser bueno falla por primera vez para dicho k:

Supongamos que A es un subonjunto malo de n elementos. Sea k el valor más pequeño tal que en I_{2k} hay menos de k elementos. Notemos que debe ser $k \le n-1$, y que en I_{2k} habrá entonces $k-1$ elementos de A (si hubiera menos, la propiedad de ser bueno habría fallado ya para $k-1$). Llamemos $J_{2k} = \{2k+1, 2k+2, \dots, 2n-1, 2n\}$, de forma que I_{2n} es la unión disjunta de I_{2k} y J_{2k}. Al conjunto A le hacemos corresponder el conjunto B dado por

$$B = \big(\,A \cap I_{2k}\,\big) \cup \big(J_{2k} \setminus A\big).$$

B tiene $n-2$ elementos: su parte en I_{2k} es la misma que la de A, luego tiene $k-1$ elementos, y la parte en J_{2k} es la complementaria de la de A, que tiene $n-k+1$ elementos; dado que J_{2k} tiene en total $2n-2k$, la parte de B en J_{2k} tiene $(2n-2k)-(n-k+1)=n-k-1$ elementos. Y $(k-1)+(n-k-1)$ nos da $n-2$ elementos en B.

La correspondencia inversa se expresa de la misma manera: dado un subconjunto $B \subset I_{2n}$ con $n-2$ elementos, obviamente hay un primer $k \leq n-1$ para el que es malo, o sea para el que en I_{2k} hay menos de k elementos. Por ser k el primero, $B \cap I_{2k}$ tiene $k-1$ elementos. El conjunto

$$A = \big(B \cap I_{2k} \big) \cup \big(J_{2k} \setminus B \big)$$

tiene n elementos, en I_{2k} los mismos que B (por lo que es malo y falla por primera vez para k), y en J_{2k} los que no están en B.

El problema ya está resuelto.

Veamos un par de ejemplos de la correspondencia dada en los casos $n = 7$ y $n = 10$ respectivamente:

• Elegimos primero el subconjunto $B = \{2,3,6,11,13\} \subset I_{14}$. En este caso $k = 4$, y de B obtenemos $A = \{2,3,6\} \cup \{9,10,12,14\}$ (la primera parte es la intersección de B con I_8 y la segunda es el complementario de $\{11,13\}$ en $J_8 = \{9,10,11,12,13,14\}$). Es decir, $A = \{2,3,6,9,10,12,14\}$, subconjunto malo de 7 elementos. Si aplicamos el mismo proceso, de A obtenemos B.

• Sea $B = \{1,5,7,11,14,17,19,20\} \subset I_{20}$. Ahora $k = 2$, y B se corresponde con $A = \{1,6,8,9,10,12,13,15,16,18\}$.

Más allá del enunciado, el interés que tiene la correspondencia es que resuelve el problema de contar los conjuntos malos, y por exclusión los conjuntos buenos. Gracias a lo que hemos observado, podemos aprovechar que es muy fácil enumerar todos los subconjuntos de $n-2$ elementos para, a través de la correspondencia, hacer lo propio con los conjuntos malos de n elementos; y dado que hay $\binom{2n}{n-2}$ subconjuntos de $n-2$ elementos de I_{2n} (si $n=1$ son 0), ese es también el número de subconjuntos malos de n elementos de I_{2n}.

En total hay $\binom{2n}{n}$ subconjuntos de n elementos de I_{2n}. Por tanto, resulta que el número de subconjuntos buenos de I_{2n} es (para $n \geq 2$)

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-2}$$

(si $n = 1$ son 2).

Veamos el caso $n = 4$: hay $\binom{8}{4} = 70$ subconjuntos de 4 elementos en I_8. El número de subconjuntos malos es $\binom{8}{2} = 28$, tantos como subconjuntos de dos elementos, y los enumeramos fácilmente según la correspondencia dada:

$12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,$	$1278, 1378, 1478, 1678, 1578, 1568, 1567,$
$23, 24, 25, 26, 27, 28, 34,$	$2378, 2478, 2678, 2578, 2568, 2567, 5678,$
$35, 36, 37, 38, 45, 46, 47,$	$4678, 4578, 4568, 4567, 3678, 3578, 3568,$
$48, 56, 57, 58, 67, 68, 78.$	$3567, 3478, 3468, 3467, 3458, 3457, 3456.$

Los subconjuntos buenos son los restantes, y su número es 70-28=42.

Los *números de Catalan* son los dados por

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Hay una gran cantidad de problemas de conteo, muchas veces sin relación aparente entre sí, cuya solución viene dada por dichos números C_n. Con el triángulo de Pascal veríamos que los primeros valores de C_n son

$$1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, \ldots$$

Es muy fácil comprobar que

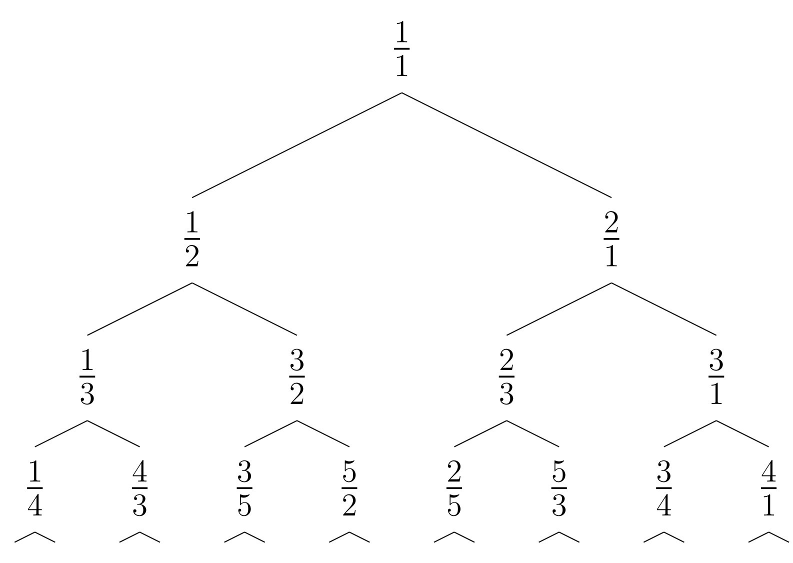
$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-2} = C_{n+1}\,,$$

así que el problema de contar los conjuntos buenos es uno de los que resuelven los números de Catalan. Por ejemplo, hemos visto antes que el número de subconjuntos buenos de cuatro elementos de I_8 es $42 = C_5$.

http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number,

http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catalan.pdf.

105. Presentamos las cuatro primeras filas (o generaciones) de un árbol binario infinito de fracciones positivas, que se obtiene como se indica después:



$$\frac{r}{s}$$

$$\frac{r}{r+s} \qquad \frac{r+s}{s}$$

Se trata de probar que:

(a) todas las fracciones del árbol son irreducibles;

(b) todas las fracciones del árbol son distintas entre sí; y

(c) todas las fracciones positivas irreducibles aparecen en el árbol (y según b aparecen una sola vez).

¿Cuál es el denominador más grande que aparece en cada fila?

(a) La fracción r/s es irreducible si el único número natural que divide a r y a s es 1. En tal caso, también lo es $r/(r+s)$ (si $r = da$ y $r+s = db$ tenemos que $s = db - r = db - da = d(b-a)$, con lo que d divide a r y a s y por tanto $d = 1$) y también lo es $(r+s)/s$ (por la misma razón). Es decir, la propiedad de ser irreducible de una fracción del árbol la heredan sus *hijas*, e inductivamente vemos que la heredan todas sus descendientes. Como todas fracciones del árbol son descendientes de la fracción irreducible $1/1$, todas son irreducibles.

(b) y (c) Llamemos *peso* de r/s irreducible a la suma $r+s$. Independientemente de que aparezca o no en el árbol, una fracción r/s irreducible y distinta de 1 es hija de $r/(s-r)$ o de $(r-s)/s$ (depende de si $r < s$ o $r > s$), y de ninguna otra fracción. Y su *madre* pesa menos que ella, porque tiene peso s o r respectivamente.

Podemos probar tanto (b) como (c) gracias a lo que acabamos de decir, ambas por inducción sobre el peso de las fracciones:

El peso menor posible es 2, el de la fracción inicial $1/1$, que aparece y no se repite en el árbol (todas las hijas de alguien son obviamente distintas de 1).

Supongamos que todas las fracciones con pesos $2, 3, \ldots, n$ aparecen en el árbol y lo hacen una sola vez, y supongamos que el peso de r/s irreducible es $n+1$. Su madre tiene peso menor o igual a n, luego su madre está en el árbol y por tanto también lo está r/s. Y su madre aparece una sola vez, luego r/s también aparece una sola vez.

Antes de responder a la última pregunta notaremos la siguiente propiedad: dado n, si r/s está en la fila n-ésima del árbol entonces s/r también se encuentra en dicha fila. Lo vemos por inducción sobre n. Para $n = 1$ es trivial. Supongamos que es cierto para n y que r/s es una fracción en la siguiente. Si $r < s$ es la hija de $r/(s-r)$, y entonces $(s-r)/r$ es una fracción de la fila n-ésima, una de cuyas hijas es s/r; y si $r > s$ entonces r/s es hija de $(r-s)/s$, compañera de fila de $s/(r-s)$, que es madre de s/r.

Visto esto, la respuesta a la última pregunta nos la da la sucesión de *números de Fibonacci* F_n, que apareció en la hoja 6 (problema 41) y en las soluciones de la hoja 8 (problema 68). Es la dada por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ con $F_1 = F_2 = 1$, de modo que los diez primeros términos de la sucesión son $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$ y 89.

Por inducción, veamos que para cada n la siguiente proposición es cierta: en la fila n-ésima aparece la fracción F_n/F_{n+1}, ninguna fracción en esa fila tiene denominador mayor que F_{n+1} y el mayor peso en la fila es $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$.

Es cierto para la fila primera, donde la única fracción es $1/1$. Si es cierto para la fila n-ésima, veamos que lo es para la siguiente: en la n-ésima aparece también F_{n+1}/F_n, luego en la siguiente está su hija $F_{n+1}/(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}/F_{n+2}$. Es claro que en cada fila el mayor denominador es el mayor peso de las fracciones en la fila precedente, luego F_{n+2} es el mayor denominador en la fila $(n+1)$-ésima. Nos queda probar que el mayor peso en esa fila es F_{n+3}: en efecto, si r/s está en ella tenemos que $s \leq F_{n+2}$, y podemos suponer que $r < s$ (porque s/r también está y tiene el mismo peso), luego r es el numerador de la madre en la fila n-ésima, con lo que también es un denominador en dicha fila y $r \leq F_{n+1}$, de donde $r + s \leq F_{n+1} + F_{n+2} = F_{n+3}$.

Entre otras cosas, hemos probado que el mayor denominador en la fila n-ésima es el número de Fibonacci F_{n+1}.

http://en.wikipedia.org/wiki/Calkin-Wilf_tree.