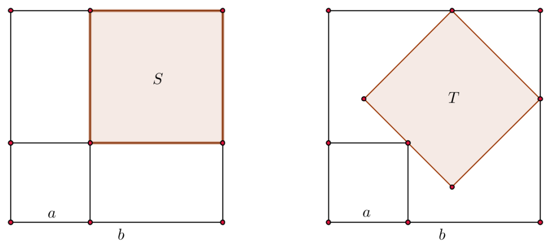
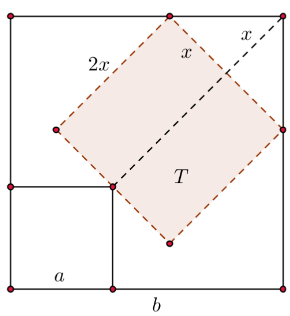
Seminario de problemas ESO. Curso 2013-14. Hoja 15

97. En las figuras adjuntas se observan dos cuadrados iguales de lado b, y en su interior dos cuadrados iguales de lado a y dos cuadrados S y T, uno en cada una de las figuras. Los lados del cuadrado S son paralelos a los de lados a y b, y las diagonales del cuadrado T son paralelas a los lados de los cuadrados de lados a y b. Calcula el cociente entre las áreas de S y de T.



Solución.



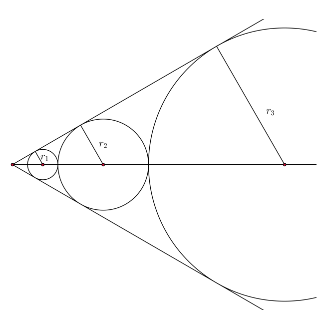
En la segunda figura, llamando $2x$ al lado del cuadrado T, es claro que

$$x + 2x = 3x = (b-a)\sqrt{2}.$$

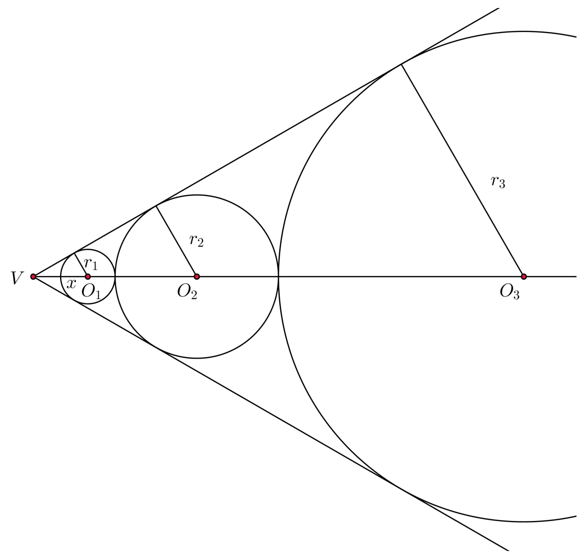
Luego

$$\frac{S}{T} = \frac{(b-a)^2}{\frac{8}{9}\,(b-a)^2} = \frac{9}{8}\,.$$

98. En la figura se observan tres circunferencias tangentes exteriores y dos rectas tangentes a las tres. Si los radios de las circunferencias son r_1, r_2 y r_3, con $r_1 < r_2 < r_3$, y la distancia entre los centros de la pequeña y de la mayor es $16\,r_1$, calcula el cociente r_1/r_2.



Solución.



Llamemos (figura) $VO_1 = x$. Se tiene, por las semejanzas y lo supuesto,

$$\frac{x}{r_1} = \frac{x + r_1 + r_2}{r_2} = \frac{x + 16r_1}{r_3},$$

de donde

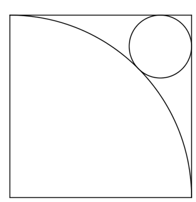
$$x = \frac{r_1(r_1 + r_2)}{r_2 - r_1} = \frac{16r_1^2}{r_3 - r_1}, \quad \Longrightarrow \quad \frac{r_1 + r_2}{r_2 - r_1} = \frac{16r_1}{r_3 - r_1}.$$

Por otra parte se tiene la igualdad $16r_1 = r_1 + 2r_2 + r_3$, de donde $r_3 = 15r_1 - 2r_2$; sustituyendo aquí arriba, resulta la ecuación de segundo grado

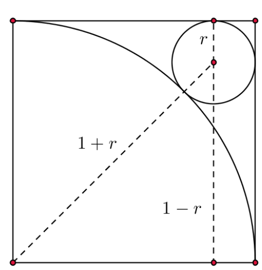
$$30r_1^2 - 4r_1r_2 - 2r_2^2 = 0.$$

Poniendo $t = r_1/r_2$, queda que $15t^2 - 2t - 1 = 0$, luego $t = \frac{1}{15}(1 + \sqrt{16}) = 1/3$.

99. El lado del cuadrado de la figura es igual a 1. ¿Cuánto mide el radio del círculo pequeño?



Solución.

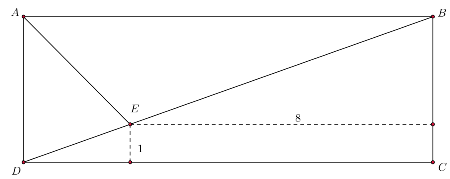


Llamando r al radio del círculo pequeño, se tiene por el teorema de Pitágoras

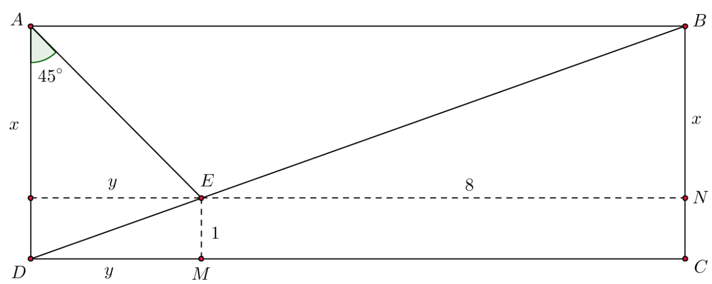
$$(1+r)^2 = 2(1-r)^2 \quad \Longrightarrow \quad r^2 - 6r + 1 = 0.$$

Luego $r = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$.

100. En el rectángulo $ABCD$ de la figura, la bisectriz del ángulo A corta a la diagonal BD en el punto E. Si las distancias de E a los lados DC y BC son 1 y 8 respectivamente, ¿cuál es la longitud del lado AB de dicho rectángulo?



Solución.



Se tiene, con las notaciones de la figura,

$$\frac{x}{8} = \frac{1}{y} \quad \Longrightarrow \quad xy = 8.$$

Pero $\angle DAE = 45°$, luego $x = y$. Entonces, $x = y = 2\sqrt{2}$ y $AB = 8 + y = 8 + 2\sqrt{2}$.

101. Encuentra todos los conjuntos de tres números enteros positivos diferentes tales que cada uno de ellos divida a la suma de los otros dos.

Solución.

Sean $a, a+b, a+b+c$ los tres números, con a, b, c enteros positivos. Se deben cunplir las tres condiciones siguientes.

$$\begin{array}{rcl} a & \mid & (2a+2b+c) \\ (a+b) & \mid & (2a+b+c) \\ (a+b+c) & \mid & (2a+b) \end{array}$$

La última condición nos dice

$$\lambda(a+b+c) = 2a+b,$$

que con $\lambda > 0$

$$(\lambda - 2)a + (\lambda - 1)b + \lambda c = 0$$

debe ser $\lambda = 1$, $a = c$ con lo que nos quedan las dos condiciones

$$\begin{array}{rcl} a & | & (3a+2b) \\ (a+b) & | & (3a+b) \end{array}$$

La segunda condición nos dice

$$\mu(a+b) = 3a + b$$

$$(\mu - 3)a + (\mu - 1)b = 0$$

Debe ser $\mu = 2$, $a = b$. En este caso la primera condición $a|(5a)$ también se verifica.

Los números son $(a, 2a, 3a)$ con a un número entero positivo.

102. Si $\sqrt{x} - \sqrt{11} = \sqrt{y}$ y los números x e y son enteros positivos, ¿cuanto puede valer como máximo el cociente x/y?

Solución.

Elevando al cuadrado los dos lados de la igualdad resulta $x + 11 - 2\sqrt{11x} = y$, o bien, que

$$2\sqrt{11x} = x - y + 11 \in \mathbb{N}.$$

De aquí deducimos en primer lugar que debe ser $x = 11r^2$ con $r > 1$ entero. Pero entonces, sustituyendo,

$$11r^2 - y + 11 = 22r,$$

de donde se sigue que y debe ser también un múltiplo de 11. Pongamos $y = 11s$, ahora se tiene

$$11r^2 - 11s + 11 = 22r, \quad \Longrightarrow \quad s = (r-1)^2.$$

Entonces

$$\frac{x}{y} = \frac{11r^2}{11s} = \frac{r^2}{s} = \frac{r^2}{(r-1)^2} = \left(\frac{r}{r-1}\right)^2 \leq 4,$$

(con máximo valor 4 cuando $r = 2$, $x = 44$ e $y = 11$), ya que

$$\frac{r}{r-1} = 1 + \frac{1}{r-1} \quad \text{y } r > 1 \text{ es un entero.}$$

103. Si la suma de dos números es 20 y la suma de sus inversos es 2, ¿cuánto vale la suma de los cubos de esos números?

Solución.

De la segunda condición resulta

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{20}{xy} = 2 \quad \Longrightarrow \quad xy = 10.$$

Entonces,

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 8000 - 600 = 7400.$$