

79. (a) Prueba que en cualquier conjunto de 27 números impares distintos, todos ellos menores que 100, habrá dos que sumen 102.

(b) ¿Cuántos conjuntos de 26 números impares distintos, todos ellos menores que 100, pueden formarse de modo que ninguna pareja en ninguno de esos conjuntos tenga una suma igual a 102?

Solución.

(a) Podemos listar los números impares del 1 al 99 en la secuencia

$$1, (3, 99), (5, 97), \dots, (49, 53), 51.$$

Aquí están las 24 parejas que suman 102 y además dos números sueltos, el 1 y el 51. Esto son 26 “nidos”. Por el principio del palomar, si elegimos 27 números impares entre el 1 y el 99, estamos forzados a seleccionar entre ellos a los dos miembros de una de las parejas $(j, 102 - j)$ para algún j impar.

(b) Para seleccionar 26 números impares entre 1 y 99 de modo que no haya ninguna pareja entre ellos que sume 102, tendremos que elegir el 1, el 51 y un número solo de cada pareja $(j, 102 - j)$ para $j = 3, 5, 7, \dots, 49$. Hay dos posibilidades para cada una de estas 24 parejas, luego podemos hacer un total de 2^{24} elecciones posibles.

80. El triángulo ABC tiene un ángulo recto en el vértice C . P es un punto del segmento AC tal que los triángulos PBA y PBC tienen sus correspondientes círculos inscritos del mismo radio. Expresa la longitud $x = PC$ en términos de las longitudes de los lados del triángulo ABC .

Solución.

Recordar la fórmula $S = pr$ que da el área S de un triángulo en función del semiperímetro p y el inradio r . Entonces, según el enunciado,

$$\frac{\frac{1}{2}xa}{\frac{1}{2}(a+x+\sqrt{x^2+a^2})} = \frac{\frac{1}{2}(b-x)a}{\frac{1}{2}(c+b-x+\sqrt{a^2+x^2})},$$

de donde, operando,

$$\begin{aligned} x(b+c-x) + x\sqrt{x^2+a^2} &= (b-x)(a+x) + (b-x)\sqrt{a^2+x^2}, \\ xc + xa - ab &= (b-2x)\sqrt{x^2+a^2} \end{aligned}$$

y, tras elevar al cuadrado esta ecuación, queda

$$\begin{aligned} 0 &= (b-2x)^2(x^2+a^2) - (xc+xa-ab)^2 \\ &= 4x^4 - 4bx^3 + (3a^2+b^2-c^2-2ac)x^2 + (2abc-2a^2b)x \\ &= 4x^4 - 4bx^3 + (2a^2-2ac)x^2 + (2ac-2a^2)bx \\ &= 2x(x-b)(2x^2+a^2-ac). \end{aligned}$$

Por consiguiente, o $x = 0$, o $x = b$, o $x = \sqrt{a(c-a)/2}$ (solución real ya que $c > a$). Solo el último valor proporciona una solución válida geoméricamente en el problema. Podemos asegurar que este valor x es menor que b , incluso que $x < b/\sqrt{2}$, ya que

$$ac - a^2 = b^2 - c(c-a) < b^2.$$

81. ¿Para qué enteros no negativos n y k es divisible por 5 el número

$$(k+1)^n + (k+2)^n + (k+3)^n + (k+4)^n + (k+5)^n ?$$

Solución.

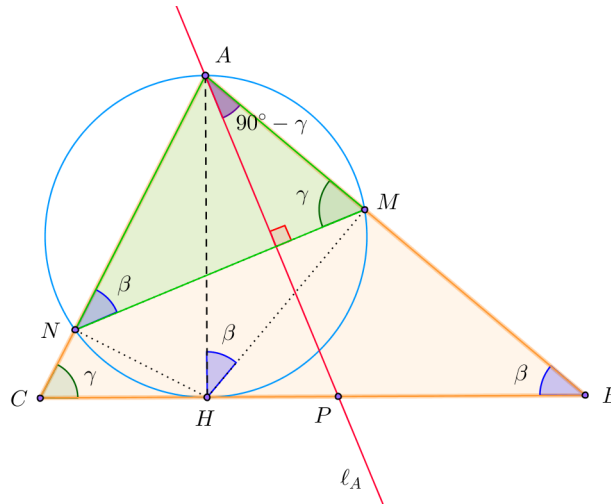
Ya que, para todo k los números $k+1$, $k+2$, $k+3$, $k+4$ y $k+5$ son congruentes, en algún orden, con 1, 2, 3, 4 y 0 módulo 5, sólo tenemos que considerar la posibilidad de que la suma $\sum_{i=1}^5 i^n = \sum_{i=1}^4 i^n$ sea congruente con 0 módulo 5.

Ahora, como una tabulación nos puede mostrar, esto ocurre si y sólo si n no es un múltiplo de 4. Con esto ya podemos dar una contestación al enunciado propuesto.

Nota complementaria. Cuando p es primo, ¿es siempre $\sum_{i=1}^{p-1} i^n \equiv 0 \pmod{p}$? ¿Y si p es compuesto?

82. Sea ABC un triángulo acutángulo. Se construyen tres rectas ℓ_A , ℓ_B y ℓ_C que pasan por los vértices A , B y C respectivamente, de acuerdo con la siguiente prescripción: Sea H el pie de la altura trazada desde el vértice A al lado BC ; sea γ_A la circunferencia de diámetro AH ; la circunferencia γ_A corta al lado AB en M y al lado AC en N , siendo M y N distintos del punto A . Entonces, ℓ_A es la recta que pasa por A y es perpendicular a MN . Las rectas ℓ_B y ℓ_C se construyen análogamente. Probar que las rectas ℓ_A , ℓ_B y ℓ_C concurren en un mismo punto.

Solución.



A partir de que el ángulo $\angle AMH$ es recto y del teorema general del ángulo inscrito en una circunferencia, se sigue la igualdad de los ángulos β de la figura, y análogamente se sigue la igualdad de los ángulos γ . Así que el triángulo AMN , semejante al ACB , es acutángulo, y por consiguiente la recta ℓ_A corta la recta MN en un punto interior al segmento MN , y a la recta BC en un punto P interior al segmento BC .

Por otra parte, $\angle BAP = \angle MAP = 90^\circ - \gamma$, y ese es el valor del ángulo $\angle BAO$ si O es el circuncentro del $\triangle ABC$, de modo que la recta $\ell_A \equiv AP$ pasa por O . De la misma manera se deduce que las rectas ℓ_B y ℓ_C pasan también por O , así que las tres son concurrentes en O .

83. (a) Sea $f(x, y, z) = x + 2y + 4z$, donde x, y y z son números reales. Hallar el máximo valor de $f(x, y, z)$ si $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$.

(b) Hallar el mínimo valor de $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2/2$ si x, y y z son números reales tales que $x + y + z = 10$.

Solución.

Vamos a usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz: $(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_i^2)$, con igualdad si y solo si $a_i = \kappa b_i$ para todo i .

(a) Ya que buscamos maximizar f , queremos que $\sum_{i=1}^3 a_i b_i = x + 2y + 4z$, y por otro lado que algo en el lado de la derecha de la desigualdad involucre la cantidad $x^2 + 2y^2 + z^2$.

Podemos elegir $(a_1, a_2, a_3) = (x, y\sqrt{2}, z)$ y $(b_1, b_2, b_3) = (1, \sqrt{2}, 4)$. Así $\sum a_i b_i = x + 2y + 4z$, $\sum a_i^2 = x^2 + 2y^2 + z^2$ y $\sum b_i^2 = 19$. La desigualdad y la condición supuesta dan

$$x + 2y + 4z \leq |x + 2y + 4z| \leq (x^2 + 2y^2 + z^2)^{1/2} \sqrt{19} = \sqrt{19},$$

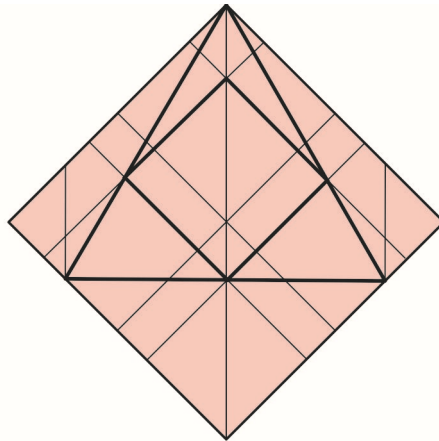
luego el máximo valor de f es $\sqrt{19}$, alcanzado cuando x, y, z son positivos, $x = y = \kappa$, $z = 4\kappa$ y $x + 2y + 4z = 19\kappa = \sqrt{19}$, lo que da el punto $(x, y, z) = (1/\sqrt{19}, 1/\sqrt{19}, 4/\sqrt{19})$.

(b) Ahora queremos un valor mínimo para $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2/2$. Podemos elegir, en la desigualdad C-S, $(a_1, a_2, a_3) = (x, y, z/\sqrt{2})$ y $(b_1, b_2, b_3) = (1, 1, \sqrt{2})$. Entonces,

$$(x + y + z)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2/2)(1 + 1 + 2),$$

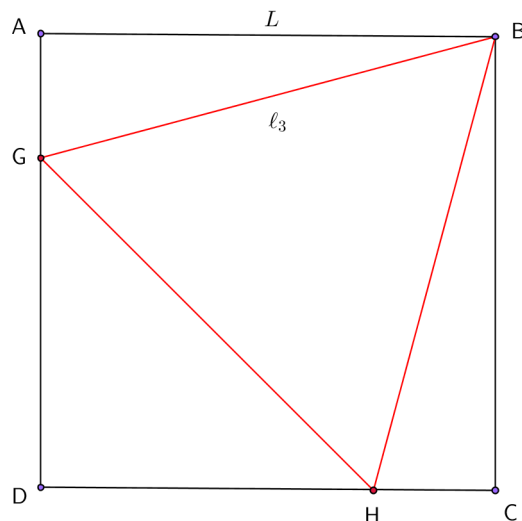
de donde resulta por la hipótesis $x^2 + y^2 + z^2/2 \geq 25$. Este es el mínimo valor, alcanzado cuando $x = y = \kappa$ y $z = 2\kappa$. Resulta ser $\kappa = 5/2$ y el punto donde se alcanza el valor mínimo es $(x, y, z) = (5/2, 5/2, 5)$.

84. En la figura vemos un cuadrado que contiene en su interior un triángulo equilátero que a su vez contiene en su interior un cuadrado. Se nos ocurren dos preguntas: (a) El triángulo equilátero interior al cuadrado, ¿es el mayor triángulo equilátero que cabe dentro del cuadrado? (b) El cuadrado interior al triángulo equilátero, ¿es el mayor cuadrado que cabe dentro del triángulo?



Solución.

(a)



En una primera posibilidad, el triángulo equilátero inscrito puede tener un vértice en uno de los vértices del cuadrado, como ocurría en la figura del enunciado, y como ocurre con el triángulo BGH de la figura de aquí arriba. Entonces, siendo L el lado del cuadrado, por una parte se debe cumplir

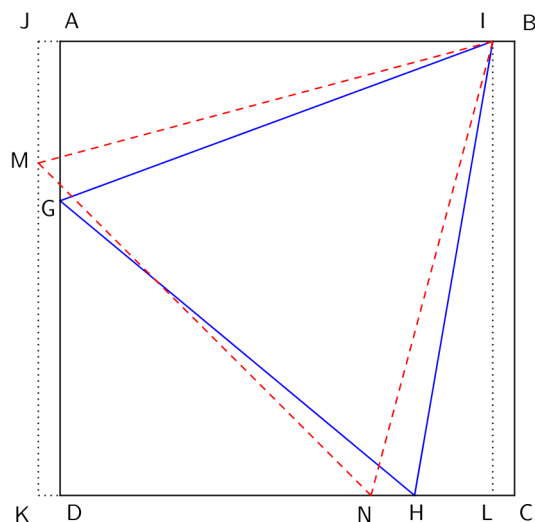
$$l_3^2 = L^2 + AG^2 = L^2 + CH^2,$$

de donde resulta que $AG^2 = CH^2$. Pero además debe ser $\angle HBG = 60^\circ$, de donde se deduce que $\angle HBC = \angle ABG = 15^\circ$. Luego no es solo que BGH sea el más grande, sino que es el único triángulo equilátero dentro de esta primera posibilidad, y la longitud de su lado es

$$l_3 = L / \cos 15^\circ = 4L / (\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

Segunda posibilidad, que el triángulo equilátero inscrito no tenga ningún vértice en uno de los vértices del cuadrado.

Podemos razonar con la figura siguiente

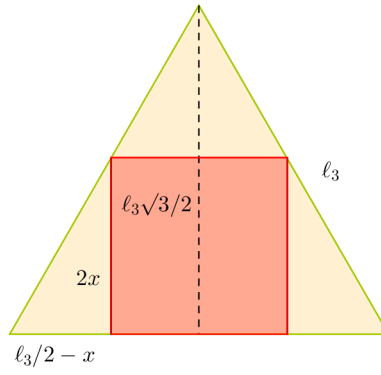


Podemos considerar ahora el cuadrado $IJKL$, resultado de trasladar nuestro cuadrado $BADC$ con el vector BI . El ángulo HIL mide menos de 15° (si midiera más, el vértice G quedaría fuera del cuadrado $ABCD$). El lado del triángulo equilátero IMN inscrito en el cuadrado $IJKL$ y que tiene un vértice en el vértice I es mayor que el lado del triángulo equilátero IGH , es decir, $IN > IH$, ya que el ángulo NIL mide 15° como hemos visto antes.

Figure 1 shows a large green triangle ABC with a red inscribed triangle EHG . The red triangle EHG is formed by the midpoints of the sides of triangle ABC . A dashed line segment BD connects vertex B to the midpoint D of the base AC . The segment BD is labeled $\ell_3/2$. The angle at vertex C is labeled 60° . The angle at vertex G is labeled 75° . The segment EG is labeled ℓ_4 .

$$l_4/\text{sen } 60^\circ = (l_3/2)/\text{sen } 75^\circ,$$

Ahora vamos a fijarnos en el cuadrado que aparece en la segunda figura.



Pongamos que su lado sea $2x$. Por semejanza de triángulos tenemos la relación

$$\frac{2x}{l_3/2 - x} = \frac{l_3\sqrt{3}/2}{l_3/2} = \sqrt{3},$$

de donde se llega a obtener $2x = l_3\sqrt{3}/(2 + \sqrt{3}) \approx 0.464 l_3 > l_4$. Así que este cuadrado es más grande que el que se muestra en el enunciado.