Seminario de problemas. Curso 2014-15. Hoja 14

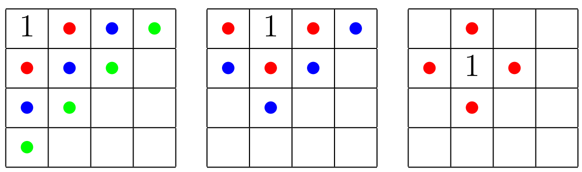
92. En el tablero

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

los números $\{1, 2, \dots, 16\}$ aparecen de modo que la diferencia del contenido de cualesquiera dos casillas que compartan algún lado común es a lo sumo 4. ¿Es posible distribuir esos mismos números de modo que esa diferencia sea a lo sumo 3?

Solución

Diremos que dos casillas son vecinas si tienen un lado en común. Dos números en casillas vecinas se dirán vecinos. Sin pérdida de generalidad, hay 3 posibles casillas donde colocar al 1.



Puesto que la diferencia entre números vecinos debe ser ≤ 3, el mayor vecino del 1 es el 4, lo que descarta al tercer tablero. Tanto los vecinos del 1 como los vecinos de estos vecinos pertenecen a $\{2, 3, \dots, 7\}$, lo que nos permite descartar el segundo tablero. Así pues, el 1 debe estar en la casilla superior izquierda y, por el mismo motivo, el 16 debe estar en la casilla inferior derecha. Los vecinos de los vecinos de los vecinos del 1 se hallan contenidos en $\{2, \dots, 10\}$ por lo que llenan todas las casillas coloreadas del primer tablero. El mismo razonamiento con los vecinos de los vecinos de los vecinos del 16 nos lleva a concluir que los números de las casillas en verde deben ser $\{7, 8, 9, 10\}$. En particular, estos números no son vecinos, por lo que cada uno tiene a lo sumo 3 vecinos. Sin embargo, hay casillas en verde que tienen cuatro vecinas. Concluimos que no es posible lo que pide el enunciado.

93. Para ir rellenando cada una de las casillas de un tablero de ajedrez 2015x2015 podemos optar entre un 1 o un -1. Una vez rellenado todo el tablero calculamos el producto de todos los elementos de la i-ésima fila, al que llamamos a_i, y el producto de todos los elementos de la i-ésima columna, al que llamamos b_i. ¿Es posible elegir el contenido de las casillas de modo que $(a_1 + b_1) + \cdots + (a_{2015} + b_{2015}) = 0$?

Solución

Vamos a estudiar lo que le ocurre a

$$s := a_1 + \cdots + a_{2015} + b_1 + \cdots + b_{2015}$$

al cambiar el contenido de la casilla en posición (i, j). El cambio que se produce en a_i es que pasa a valer o bien $a_i + 2$ o bien $a_i - 2$. Algo similar le ocurre a b_j. Por lo tanto, aunque s cambia, su valor módulo 4 permanece invariante. Cambiando el valor de todas las casillas que contienen un -1 vemos que, rellenemos como rellenemos el tablero, siempre se tendrá que $s \equiv 2015 + 2015 \equiv 2$ módulo 4, por lo que no es posible lo que pide el enunciado.

94. Prueba que todo número entero positivo n, excepto quizás un número finito de ellos, puede expresarse como $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2015}$ donde $1 \leq a_1 < \cdots < a_{2015}$ también son enteros positivos que además cumplen que cada uno divide al siguiente.

Solución

Usaremos inducción. Asumamos como cierto que para un cierto m existe $N(m) \geq 1$ de modo que todo $n \geq N(m)$ se expresa como $n = b_1 + \cdots + b_m$ con $1 \leq b_1 < \cdots < b_m$ y $b_i | b_{i+1}$ $i = 1, \ldots, m-1$. Dado n, escribimos $n = 2^l(2n' + 1)$. Si $n' \geq N(m)$ entonces $n' = b_1 + \cdots + b_m$ por lo que

$$n = \underbrace{2^l}_{a_1} + \underbrace{2^{l+1}b_1}_{a_2} + \cdots + \underbrace{2^{l+1}b_m}_{a_{m+1}}$$

y hemos acabado. Escribimos $l = 2l' + \epsilon$ con $\epsilon \in \{0, 1\}$. Si $2^{l'} - 1 \geq N(m)$ entonces $2^l = 2^\epsilon(2^{l'} + 1)(2^{l'} - 1) + 2^\epsilon = 2^\epsilon + 2^\epsilon(2^{l'} + 1)b_1 + \cdots + 2^\epsilon(2^{l'} + 1)b_m$,

$$n = \underbrace{2^\epsilon(2n' + 1)}_{a_1} + \underbrace{2^\epsilon(2^{l'} + 1)b_1(2n' + 1)}_{a_2} \cdots + \underbrace{2^\epsilon(2^{l'} + 1)b_m(2n' + 1)}_{a_{m+1}}$$

y nuevamente hemos acabado. Eligiendo $N(m + 1) \geq 4(N(m) + 1)^3$ garantizamos que al menos una de las condiciones en rojo siempre se cumpla, por lo que queda probado el paso de inducción.

95. Halla todos los números $0 \leq r \leq 1600$ tales que $\binom{1600}{r}$ es impar.

Solución

Hay al menos dos formas de calcular el polinomio $(x + 1)^{1600}$ módulo 2. Una es utilizar el binomio de Newton $(x+1)^{1600} = \sum_{r=0}^{1600} \binom{1600}{r} x^r$ y reducir los coeficientes módulo 2, por lo que los números buscados son los exponentes de los monomios no nulos que queden. Otro método es usar que $(a + b)^2 \equiv a^2 + b^2$ módulo 2 y que en general $(a + b)^{2^k} \equiv a^{2^k} + b^{2^k}$. Como $1600 = 1204 + 512 + 64$ entonces $(x + 1)^{1600} \equiv (x^{1204} + 1)(x^{512} + 1)(x^{64} + 1)$ por lo que los números buscados son $\{0, 64, 512, 1024, 576, 1088, 1536, 1600\}$.

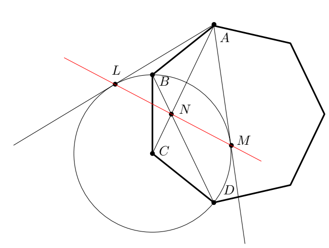
96. Sean $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ números reales tales que $a_1 + \cdots + a_n = 0$. Prueba que

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 + na_1a_n \leq 0.$$

Solución

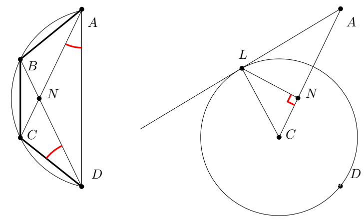
Para mejorar la situación hacemos un cambio de variable $b_i := a_i - a_1$, $i = 2, \ldots, n$. De este modo $0 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_m$. La igualdad en las hipótesis queda $b_2 + \cdots + b_n = -na_1$. Sustituyendo a_i por $b_i + a_1$ $i = 2, \ldots, n$ en el lado izquierdo de la desigualdad a probar, y usando la anterior relación, obtenemos $b_2^2 + \cdots + b_n^2 - (b_2 + \cdots + b_n)b_n$. Puesto que $b_2, \ldots, b_n$ no son negativos y b_n es el mayor de todos entonces queda claro que la expresión obtenida es ≤ 0.

97. Sean A, B, C, D vértices consecutivos de un heptágono regular y AL, AM las tangentes desde a A a la circunferencia de radio CB. Sea N la intersección de AC y BD. Demuestra que los puntos L, M y N son colineales.

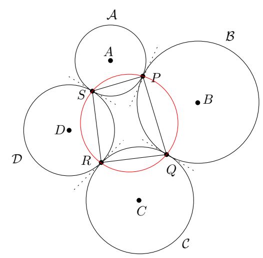


Solución

Por ángulos inscritos se tiene que los ángulos $\angle BDC$ y $\angle CAD$ son iguales. Por lo tanto los triángulos $\triangle DNC$ y $\triangle DAC$ son semejantes y $\frac{AC}{CD} = \frac{DC}{CN}$. Puesto que $CD = CL$ se tiene que $\frac{AC}{CL} = \frac{LC}{CN}$. Al tener los triángulos $\triangle ACL$ y $\triangle NCL$ el ángulo $\angle ACL$ en común esta relación implica que son semejantes y que los ángulos $\angle ALC$ y $\angle LNC$ coinciden. Por lo tanto $\angle LNC$ es un ángulo recto, lo que implica que N es el punto medio de la cuerda que une M y L.

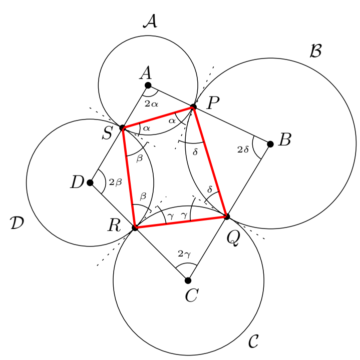


98. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ cuatro circunferencia con las tangencias descritas por la figura de la derecha. Asumamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ no se intersecan y que tampoco $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ lo hacen. Prueba que los puntos P, Q, R, S están sobre una circunferencia. Si además $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ tienen radio 2, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ tienen radio 3 y la distancia entre los centros de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ es 6 determina el área del cuadrilátero $PQRS$.



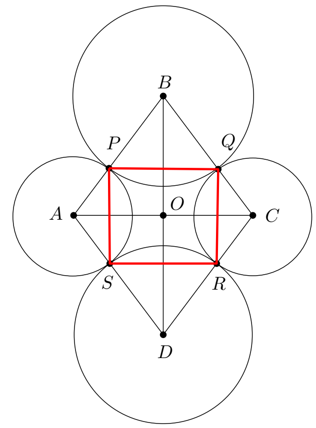
Solución

Al ser el ángulo central el doble del que forma la cuerda con la recta tangente en el punto de corte, se tiene la siguiente figura:



La suma $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta$ es 360 grados, por lo que la suma de los ángulos en vértices opuestos del cuadrilátero $PQRS$ es 180 grados. Por consiguiente este cuadrilátero es cíclico.

Para probar el segundo apartado del problema observamos que por simetría, $ABCD$ es un rombo. Las diagonales de este rombo se cortan perpendicularmente en el punto O por lo que el cuadrilátero $PQRS$ es un rectángulo. La figura sería más o menos así:



Los triángulos $\triangle QBP$ y $\triangle CBA$ son semejantes con razón se semejanza $3 : 5$ ya que $CQ = 2$ y $CB = 5$. Al ser $AC = 6$ se tiene que $PQ = \frac{18}{5}$. Del mismo modo se puede calcular $PS = \frac{16}{5}$ ya que $BD = 8$ por el Teorema de Pitágoras. El área que se pide es $PQ \cdot PS = \frac{18}{5} \cdot \frac{16}{5} = \frac{288}{25}$.