

90. Sea p un número primo. Hay que organizar un torneo de p -parchís (en cada partida juegan p jugadores) con p^2 jugadores inscritos, sujeto a las siguientes reglas:

- El torneo se divide en varias rondas. En cada ronda se jugarán varias partidas. Cada jugador jugará como máximo una partida en cada ronda.
- Al final del torneo cada jugador se habrá enfrentado exactamente en una partida con cada uno de los demás jugadores.

¿Se puede organizar un torneo así? En caso afirmativo, ¿cuál es el mínimo número de rondas que puede tener el torneo?

Solución

El número de partidas que disputa cada jugador es

$$\frac{\text{número de jugadores a los que se enfrenta}}{\text{número de jugadores a los que se enfrenta en cada partida}} = \frac{p^2 - 1}{p - 1}.$$

De modo que cada jugador juega $p + 1$ partidas. Por tanto el número de rondas es, al menos, $p + 1$, y es exactamente $p + 1$ cuando todos los jugadores juegan en todas las rondas. En ese caso, en cada ronda se disputan $\frac{p^2}{p} = p$ partidas.

Vamos a probar que es posible organizar un torneo así con $p + 1$ rondas y p partidas en cada ronda. A cada jugador le pondremos un dorsal con un número de dos cifras escrito en base p , $C_i C_d$, donde tanto la cifra izquierda C_i como la cifra derecha C_d son enteros entre 0 y $p - 1$. Entonces diseñamos la siguiente planificación:

- **Ronda 0:** Se agrupan para jugar la partida m los jugadores que tienen $C_i = m$ ($0 \leq m < p$).
- **Ronda 1:** Se agrupan para jugar la partida m los jugadores que tienen $C_i + C_d \equiv m \pmod{p}$ ($0 \leq m < p$).
-
- **Ronda k :** Se agrupan para jugar la partida m los jugadores que tienen $C_i + k \cdot C_d \equiv m \pmod{p}$ ($0 \leq m < p$).
-
- **Ronda $p - 1$:** Se agrupan para jugar la partida m los jugadores que tienen $C_i + (p - 1) \cdot C_d \equiv m \pmod{p}$ ($0 \leq m < p$).
- **Ronda p :** Se agrupan para jugar la partida m los jugadores que tienen $C_d = m$ ($0 \leq m < p$).

Hay que comprobar que la planificación propuesta agrupa a los jugadores en conjuntos de p elementos:

En las rondas 0 y p queda claro. Consideramos la ronda k con $0 < k < p$. Para cada C_i fijado, al hacer variar C_d , el resto de $C_i + k \cdot C_d \pmod{p}$ es siempre distinto (si no lo fuera

- 92.** Determina la menor distancia posible del origen de coordenadas a los puntos (x, y) de la curva $(x - y)xy = 8$ situados en el primer cuadrante.

Solución

El cuadrado de la distancia del origen al punto (x, y) es

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = (x - y)^2 + \frac{16}{x - y}.$$

Poniendo $x - y = t$ ($t > 0$ porque $x > 0$, $y > 0$ y $(x - y)xy > 0$), se trata de minimizar la función

$$f(t) = t^2 + \frac{16}{t} \quad \text{para } t > 0.$$

La derivada es

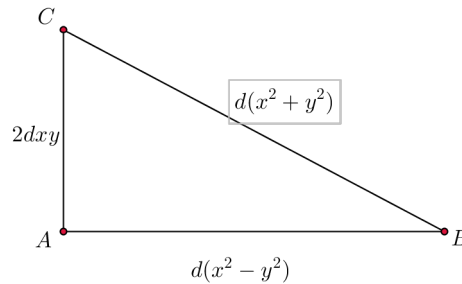
$$f'(t) = \frac{2t^3 - 16}{t^2},$$

y $f(t)$ tiene un mínimo relativo en $t = 2$, donde se alcanza el mínimo absoluto de la función en el intervalo $t > 0$, $f(2) = 12$.

Entonces, la mínima distancia es $\sqrt{12}$, del origen al punto $(1 + \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5})$.

- 93.** En un triángulo rectángulo de lados enteros, el radio de la circunferencia inscrita es 12. Calcula el mayor valor posible para la hipotenusa de dicho triángulo.

Solución.



En un triángulo rectángulo se cumple que $2r = b + c - a$, por tanto

$$24 = d(2xy + x^2 - y^2 - x^2 - y^2) = 2dy(x - y),$$

de donde $12 = d[y(x - y)]$. Se tiene que d es un número entero que divide a 12. Para $d = 1$, los posibles valores de $x, y \in \mathbb{Z}$ (y las correspondientes hipotenusas) son

$$\begin{array}{l|l} y = 12, x = 13 \rightarrow h = 313 & y = 3, x = 7 \rightarrow h = 58 \\ y = 6, x = 8 \rightarrow h = 100 & y = 2, x = 8 \rightarrow h = 68 \\ y = 4, x = 7 \rightarrow h = 65 & y = 1, x = 13 \rightarrow h = 170 \end{array}$$

Observamos que la mayor hipotenusa es la de valor 313 (correspondiente a los catetos 312 y 25).

Para el resto de posibles valores de d , siguiendo un razonamiento similar, se ve que no se obtiene ninguna hipotenusa cuyo valor sea mayor que 313.

94. Calcula $\sum_{k=5}^{49} \frac{11_{(k)}}{2^{\sqrt[3]{1331}_{(k)}}}$ ($11_{(k)}$ significa “11 en base k ”).

Solución.

Se tiene

$$\begin{aligned} 11_{(k)} &= k + 1, \\ 1331_{(k)} &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k + 1)^3. \end{aligned}$$

Entonces la suma pedida es

$$S = \sum_{k=5}^{49} \frac{11_{(k)}}{2^{\sqrt[3]{1331}_{(k)}}} = \sum_{k=5}^{49} \frac{k + 1}{2^{k+1}} = \sum_{k=6}^{50} \frac{k}{2^k}.$$

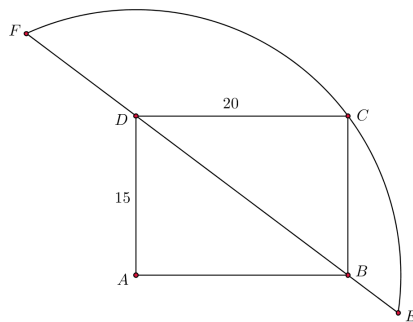
Ahora bien,

$$2S = \sum_{k=5}^{49} \frac{2k + 2}{2^{k+1}} = \sum_{k=5}^{49} \frac{k}{2^k} + \sum_{k=5}^{49} \frac{1}{2^k} = S + \frac{5}{2^5} - \frac{50}{2^{50}} + \frac{\frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^{50}}}{\frac{1}{2}},$$

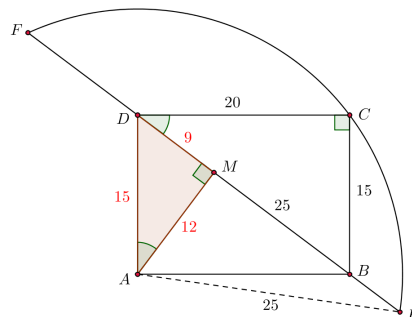
luego

$$S = \frac{7 \cdot 2^{43} - 13}{2^{48}}.$$

95. En la figura se observa un rectángulo $ABCD$ de lados 20 y 15 y un arco de la circunferencia de centro A y radio AC . La cuerda de dicho arco pasa por D y B . ¿Cuál es la longitud de la cuerda?



Solución



Sea M el pie de la perpendicular trazada por el centro A a la cuerda EF . La semejanza de los triángulos DCB y AMD da $DM = 9$, $AM = 12$. Como $AE = AC = 25$, por el teorema de Pitágoras en el triángulo AME se tiene

$$EF = 2 \cdot ME = 2\sqrt{25^2 - 12^2} = 2\sqrt{37 \cdot 13}.$$

- 96.** Demuestra que en todo triángulo de lados a, b, c y ángulos opuestos (medidos en radianes) A, B, C respectivamente, se cumplen las desigualdades

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{aA + bB + cC}{a + b + c} < \frac{\pi}{2}.$$

Solución.

Para la primera desigualdad, supongamos $a \geq b \geq c$. Entonces, $A \geq B \geq C$ y se cumplen las desigualdades

$$(a - b)(A - B) \geq 0, \quad (b - c)(B - C) \geq 0, \quad (c - a)(C - A) \geq 0.$$

Sumándolas se tiene

$$(a - b)(A - B) + (b - c)(B - C) + (c - a)(C - A) \geq 0,$$

y desarrollando se llega a

$$2(aA + bB + cC) \geq (b + c)A + (c + a)B + (a + b)C;$$

sumando a los dos miembros $aA + bB + cC$ resulta

$$3(aA + bB + cC) \geq (a + b + c)(A + B + C)$$

y, puesto que $A + B + C = \pi$, se obtiene ya

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}$$

con igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

Para probar la segunda desigualdad partimos de las desigualdades triangulares

$$a + b + c > 2a, \quad a + b + c > 2b, \quad a + b + c > 2c.$$

Multiplicando respectivamente por A, B, C y sumando, resulta

$$(a + b + c)(A + B + C) > 2(aA + bB + cC),$$

luego

$$\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} < \frac{\pi}{2}.$$